DOR : 20.1001.1.2538161.1402.8.1.3.5
بهار ۱۴۰۲، دوره ۸، شماره ۱، پیاپی ۲۸

دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۲۰

نوع مقاله: پژوهشی

مسئله طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توری T – شکل با اندازه زوج

امیرفانی قهدریجانی
گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
پست الکترونیکی: amir.fani@shahed.ac.ir

فاطمه کشاورز کوهجردی*
گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
پست الکترونیکی: f.keshavarz@shahed.ac.ir

چکیده

مسئله طولانی‌ترین مسیر، یعنی یافتن یک مسیر ساده با بیشترین تعداد رأس، یک مسئله ان‌پی سخت با کاربردهای زیاد است. با این حال این مسئله برای برخی از رده‌های گراف، از جمله گراف‌های توری بدون حفره یک مسئله باز است. گراف توری T–شکل، نوع خاصی از گراف توری بدون حفره است. در این مقاله، نشان می‌دهیم که مسئله طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توری T–شکل با اندازه زوج را می‌توان در زمان خطی محاسبه کرد.

واژه‌های کلیدی: گراف توری،گراف توری بدون حفره، مسیر همیلتونی، گراف توری T–شکل، طولانی‌ترین مسیر

۱- مقدمه

مسئله طولانی‌ترین مسیر، مسئله یافتن مسیری ساده با بیشترین تعداد رأس بین دو رأس معین در گراف است. این مسئله یکی از مسائل ان‌پی سخت مشهور در نظریه گراف است. مسئله‌ای در ردهٔ پی است اگر در زمان چند جمله‌ای قابل حل باشد. مسئله‌ای در ردهٔ ان‌پی است که در زمان چند جمله‌ای قابل راستی آزمایی باشد، یعنی با داشتن یک جواب بالقوه بتوان در زمان چندجمله‌ای راستی آزمایی کنیم که این جواب واقعا یک جواب درست برای مسئله است یا خیر. مسئله ان‌پی سخت مسئله‌ای است که همه مسائل ان‌پی را بتوان در زمان چند جمله‌ای به آن کاهش داد. مسئله A به مسئله B کاهش می‌یابد اگر بتوان هر نمونه از مسئله A را به یک نمونه از مسئله B تبدیل کرد و از روی جواب مسئله B بتوان جواب مسئله A را به دست آورد. مسئله مسیر همیلتونی، یعنی تصمیم‌گیری در مورد این‌که آیا مسیری ساده بین دو رأس معین در گراف وجود دارد که هر رأس دقیقاً یک بار ملاقات شود، حالت خاصی از مسئله طولانی‌ترین مسیر است. این مسئله کاربردهای زیادی در طراحی تراشه‌های *VLSI*، تجسم اطلاعات، روباتیک و غیره دارد [1] و تنها برای رده‌های خاصی از گراف الگوریتم زمان چندجمله‌ای ارائه شده است [2] و هنوز برای برخی

* نویسندهٔ مسئول

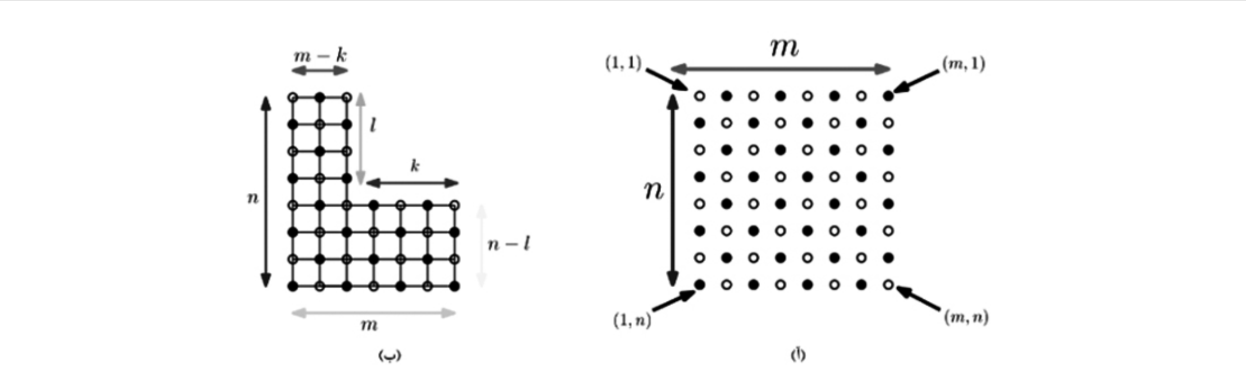
از انواع رده‌های گراف این مسئله باز است [۳]. گراف توری اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط لوسیو و موگنیا معرفی شد [٤]. ایتای و همکارانش [٥] ثابت کردند که مسئله مسیر همیلتونی برای گراف‌های توری عمومی ان‌پی کامل است، آن‌ها همچنین مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین در گراف‌های توری مستطیلی را حل کردند. چن و همکارانش [٦] الگوریتمی موازی برای ساختن مسیر همیلتونی در گراف توری مستطیلی ارائه کردند. چانگ و همکارانش [٧] مسئله طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس معین که دقیقا یک رأس از گراف توری مستطیلی حذف شده باشد را حل کردند. هیدارا و همکارانش [٨] مسئله طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس معین که دقیقا دو رأس از گراف توری مستطیلی حذف شده باشد را حل کردند. یوانید و همکارانش [٩] مسئله طولانی‌ترین مسیر را برای گراف‌های بازه‌ای در زمان $O(n^4)$ حل کردند. کشاورز کوهجردی و باقری یک الگوریتم زمان خطی برای پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های توری الفبایی خاص E، F، C، L و O ارائه کردند [١٠ و ١٦]. گراف‌های توری الفبایی، معادل حروف الفبایی انگلیسی هستند. گراف توری الفبایی T حالت خاصی از گراف‌های T-شکل است. آن‌ها همچنین یک الگوریتم زمان خطی برای مسئله طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس مشخص و طولانی‌ترین دور در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره مستطیلی ارائه کردند [۱۳، ١٤، ١٥، ١٨ و ١٩]. اصغریان سردرود و باقری یک الگوریتم با ضریب تقریب $\frac{2}{3}$ برای مسئله طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توری ارائه دادند [١٧]. فرقانی و کشاورز کوهجردی مسئله مسیر همیلتونی را برای گراف‌های توری T-شکل در حالتی که اندازه گراف زوج باشد حل کردند [١١ و ١٢]. غریب بلوکی و کشاورز کوهجردی مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L-شکل با اندازه فرد را حل کردند [٢١]. تا به حال راه حل چند جمله‌ای برای هیچ یک از مسائل ان‌پی سخت ارائه نشده است و عقیده عمومی این است که این مسائل را نمی‌توان در زمان چند جمله‌ای حل کرد. بنابراین برای حل این مسائل یا از روش‌های تقریبی استفاده می‌شود یا حالات خاص این مسائل که در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند، بررسی می‌شوند. در این مقاله، مسئله طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس معین s و t در گراف‌های توری T-شکل با اندازه زوج را بررسی می‌کنیم و یک الگوریتم زمان خطی برای آن ارائه می‌دهیم.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش۲، برخی تعاریف، نمادها و نتایجی که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. در بخش۳، حد بالا روی طول طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توریT-شکل را به‌دست می‌آوریم. در بخش٤، الگوریتمی زمان خطی برای ساخت طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس معین s و t بیان می‌شود. نتیجه‌گیری نیز در بخش٥ بیان می‌شود.

۲- تعاریف و نتایج پیشین

گراف نامتناهی G^∞ گرافی است که مجموعه رئوس آن نقاط صفحه با مختصات صحیح می باشد و دو رأس از طریق یالی به هم متصل هستند اگر و تنها اگر فاصله اقلیدسی بین آن‌ها یک باشد. گراف توری G_g یک زیرگراف متناهی از گراف نامتناهی G^∞ است. در گراف توری درجه هر رأس حداکثر چهار است.

فرض کنید $G = (V.E)$ یک گراف توری با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال $V(E)$ باشد. مختصات رأس v توسط v_x و v_y مشخص می شود. رأس v زوج است اگر $v_x + v_y$ زوج باشد. در غیر این صورت فرد است. رئوس زوج با رنگ سفید و رئوس فرد با رنگ سیاه نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که مسیر در گراف توری بین رئوس سیاه و سفید تغییر می‌کند. تعداد رئوس سیاه و سفید متفاوت است. رنگی که با آن تعداد رئوس بیشتری رنگ شده است را رنگ اکثریت می‌نامند و رنگ دیگر اقلیت نامیده می‌شود. فرض کنید V_B تعداد رئوس سیاه و V_W تعداد رئوس سفید در گراف توری باشد. اندازه یک گراف

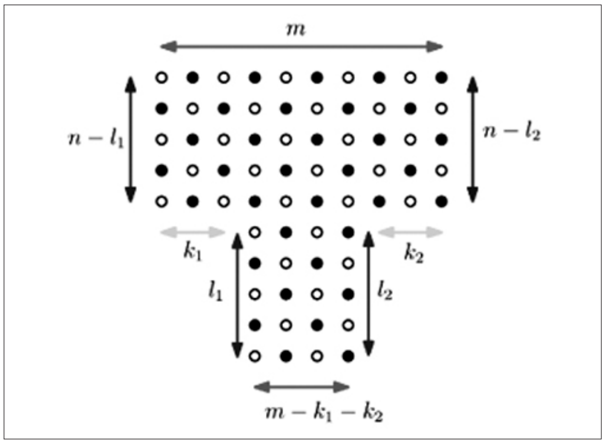


شکل ۱: (آ) گراف توری مستطیلی R(۸.۸) و (ب) گراف توری L-شکل L(۷.۸; ۴.۴)

توری زوج (متناظراً فرد) است اگر $|V_W| = |V_B|$ (متناظراً $||V_W| - |V_B|| = 1$). طول مسیر (یا دور) تعداد رئوس مسیر (یا دور) تعریف می‌شود. فرض کنید v یک رأس در گراف توری باشد، آنگاه $color(v)$ یعنی رنگ رأس v در این مقاله، فرض می‌کنیم (۱و۱) مختصات رأس گوشه چپ بالا باشد. گراف توری مستطیلی، گرافی با مجموعه رئوس $V(R) = \{v \mid 1 \le v_x \le m$ و $1 \le v_y \le n\}$ است، که با $R(m.n)$ یا G_R نمایش داده می‌شود. اندازه گراف توری مستطیلی، $m \times n$ است. شکل ۱(آ) مثالی از یک گراف توری مستطیلی را نمایش می‌دهد. $R(m.n)$ یک k-مستطیل است اگر $k = m$ یا $k = n$ باشد. گراف توری L-شکل که با $L(m.n;k.l)$ یا G_L نمایش داده می‌شود، یک گراف توری مستطیلی است که یک زیرگراف توری مستطیلی $R(k.l)$ از گوشه آن حذف شده است.

شکل ۱(ب) یک گراف توری L-شکل را نمایش می‌دهد. اندازه گراف توری L- شکل $m \times n - k \times l$ است.

گراف توری T-شکل که با $T(m.n;k_1.l_1;k_2.l_2)$ یا G_T نمایش داده می‌شود، یک گراف توری مستطیلی است که دو زیرگراف توری مستطیلی $R(k_1.l_1)$ و $R(k_2.l_2)$ به ترتیب از گوشه چپ پائین و گوشه راست پائین آن حذف شده است. اندازه گراف توری T-شکل، $mn - k_1l_1 - k_2l_2$ است، شکل۲ یک گراف توری T-شکل را نمایش می‌دهد.



شکل ۲: گراف توری T- شکل T(۱۰.۱۰; ۳.۵; ۳.۵)

تعریف ۲-۱. دو رأس متفاوتs و t در G سازگار-رنگی نامیده می‌شوند اگر (الف) $||V_B| - |V_W|| = 1$ و s و t رنگ اکثریت داشته باشند یا (ب) $|V_B| = |V_W|$ و s و t رنگ متفاوت داشته باشند.

اگر $|V_B| = |V_W|$ باشد، آنگاه تعداد رئوس سفید و سیاه یکسان است. از این رو دو رأس پایانی هر مسیر همیلتونی در گراف باید رنگ متفاوت داشته باشند. به‌طور مشابه اگر $||V_B| - |V_W|| = 1$ باشد، آنگاه تعداد رئوس با رنگ اکثریت یکی بیشتر از تعداد رئوس با رنگ اقلیت است. بنابراین دو رأس پایانی هر مسیر همیلتونی در گراف باید رنگ اکثریت داشته باشند. پس سازگار-رنگی بودن رئوس s و t شرط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در گراف توری است. در ادامه از $(G.s.t)$ برای نشان دادن یک گراف توری G با دو رأس متمایز s و t و از $P(G.s.t)$ برای نشان دادن مسئله پیدا کردن مسیر همیلتونی (یا مسئله پیدا کردن طولانی‌ترین مسیر) بین رئوس s و t در گراف توری G استفاده می‌کنیم. همچنین مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در G را با $HP(G.s.t)$ نشان می‌دهیم.

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $s_x \leq t_x$ است.

ایتای و همکارانش نشان دادند اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه $(R(m.n).s.t)$ مسیر همیلتونی ندارد [۵].

(م۱) s یا t رأس برشی باشند یا $\{s.t\}$ برش رأسی باشند (شکل ۳(آ) و ۳(ب) را ببینید).

(م۲)m زوج باشد، $n = ۳$، $w = (۱.۲)$، $color(w) = color(s)$ و [(s_y فرد باشد و $t_x > s_x + ۱$ (شکل ۳(ج)) یا (s_y زوج باشد و $t_x > s_x$ (شکل ۳(د))].

تعریف ۲-۲. مسئله مسیر همیلتونی $P(R(m.n).s.t)$ قابل قبول است، اگر سازگار-رنگی باشند و $(R(m.n).s.t)$ هیچ‌یک از شرایط (م۱) و (م۲) را برآورده نکند.

قضیه ۲-۱. فرض کنید $R(m.n)$ یک گراف توری مستطیلی شکل و s و t دو رأس مجزای آن باشند. $HP(R(m.n).s.t)$ وجود دارد، اگر و فقط اگر $(R(m.n).s.t)$ قابل قبول باشد[۵].

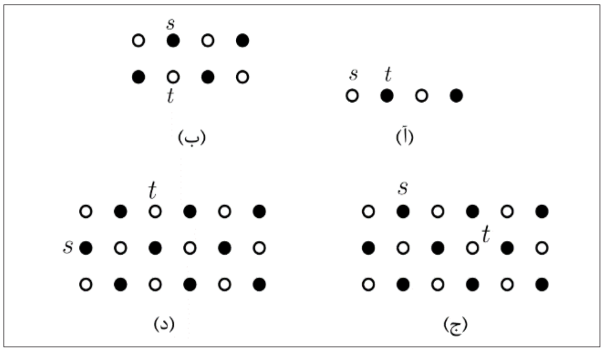
قضیه ۲-۲. فرض کنید $R(m.n)$ یک گراف توری مستطیلی، $m.n \geq ۲$ و s و t دو رأس مجزای آن باشند، در این صورت مسیر همیلتونی در زمان خطی در $R(m.n)$ ساخته می‌شود [۵].

لم ۲-۱. فرض کنید $R(m.n)$ یک گراف توری مستطیلی باشد. $R(m.n)$ دور همیلتونی دارد، اگر و فقط اگر $|V_B| = |V_w|$ و $m.n > ۱$ [۵].

در ادامه مقاله، منظور از طول یک مسیر یا دور تعداد رئوس مسیر یا دور است. همچنین $\widehat{U}(G.s.t)$ حد بالا روی طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t را نشان می‌دهد.

لم ۲-۲. فرض کنید $R(m.n)$ یک گراف توری مستطیلی باشد. فرض کنید $m.n > ۱$ و $||V_B| - |V_w|| = ۱$ باشد. آنگاه طول طولانی‌ترین دور در $R(m.n)$ برابر با $m \times n - ۱$ [۲۰].

کشاورز کوهجردی و باقری [۱۳] برای مسئله طولانی‌ترین مسیر در گراف توری مستطیلی شرایط زیر را ثابت کردند.



شکل ۳: شرایط (م۱) و (م۲) در گراف توری مستطیلی

(ش۱) $(R(m.n).s.t)$ سازگار-رنگی است و هیچیک از شرایط (م۱) و (م۲) بر قرار نباشد.

(ش۲) شرایط (م۱*) و (م۲*) بر قرار نباشد و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(۱) اندازهٔ $R(m.n)$ زوج است و s و t همرنگ هستند.

(۲) اندازهٔ $R(m.n)$ فرد است و s و t رنگ‌های متفاوتی دارند.

(ش۳) شرایط (م۱*) و (م۲*) برقرار نباشد و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(۱) اندازه $R(m.n)$ فرد است و رئوس s و t سیاه رنگ هستند، یا

(۲) $(R(m.n).s.t)$ سازگار-رنگی است و شرط (م۲) برقرار باشد.

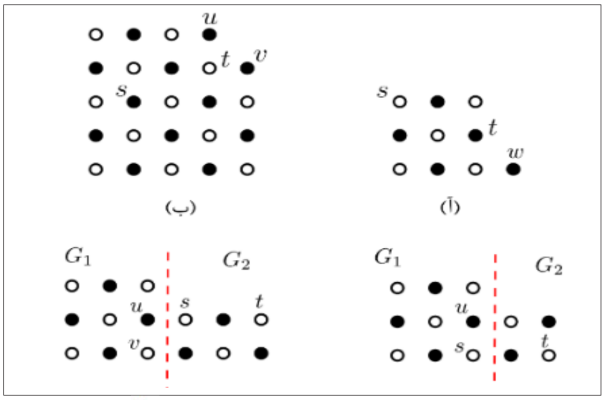
در اینجا (م۱*) و (م۲*) به صورت زیر تعریف می‌شود:

(م۱*) $R(m.n)$ یک گراف توری ۱-مستطیلی است و $s_x \neq ۱$ یا $t_x \neq m$.

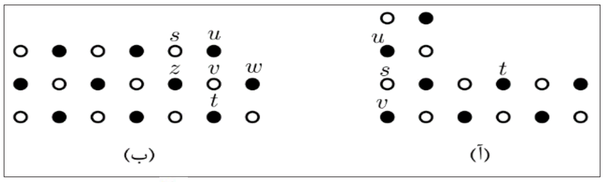
(م۲*) $R(m.n)$ یک گراف توری ۲-مستطیلی است و $(s_x = t_x)$ یا ($s_x = t_x$ و $s_x = t_x - ۱$).

آن‌ها حدهای بالای زیر را برای طول طولانی‌ترین مسیرها در گراف توری مستطیلی $R(m.n)$ ثابت کردند:

$$\hat{U}(R(m,n),s,t) = \begin{cases} t_x - s_x + 1; & \text{اگر (م۱*)} \\ \max(t_x + s_x, 2m - t_x - s_x + 2); & \text{اگر (م۲*)} \\ mn; & \text{اگر (ش۱)} \\ mn - 1; & \text{اگر (ش۲)} \\ mn - 2; & \text{اگر (ش۳)} \end{cases}$$



شکل ۴: شرایط (م۳)، (م۴) و (م۵) در G_L



شکل ۵: شرایط (م۶) و (م۷) در G_L.

قضیـــه ۲-۳. در گــراف توری مســتطیلی $R(m.n)$ طولانی‌ترین مســیر بین هر دو رأس s و t را می‌توان در زمان خطی یافت و طول آن یعنی $\hat{L}(R(m.n).s.t)$ برابر با $\hat{U}(R(m.n).s.t)$ است [۱۳].

کشــاورز کوهجردی و باقری ثابت کردند علاوه بر شــرط (م۱) اگر یکی از شــرایط زیر برقرار باشــد، آنگاه در گراف توری L-شــکل بین s و t مسیر همیلتونی وجود ندارد [۱۵]. دقت کنید حالت‌های مشــابه در کل مقاله حذف شده است.

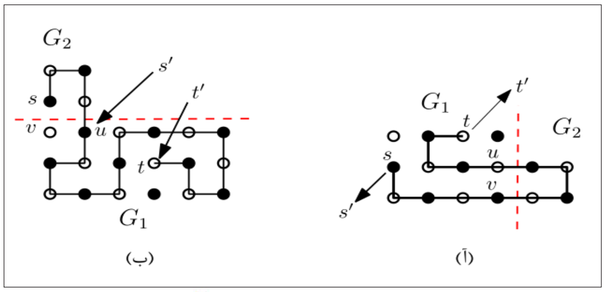
(م۳) $\exists w \in VG_L$، $d(w)=۱$، $s \neq w$ و $t \neq w$ (شکل ۴(آ) را ببینید).

(م۴) G_L زوج باشد، $k=l=۱$، $m-۱=even>۲$، $n-l=even>۲$، $s=(m-۱.۲)$ و $t \neq (m-۱.۱)$ (شکل ۴(ب) را ببینید).

(م۵) G_L فرد باشــد، $m-k>۱$، $m-k$ فرد باشد، $n-l=۲$ و [$(s_x.t_x>m-k)$ یــا $(s=(m-k.n))$ و $(t_x>m-k)$] (شکل‌های ۴(ج) و ۴(د) را ببینید).

(م۶) G_L زوج باشــد، $m-k>۲$، $n-l=۲$، $s=(۱.n-۱)$ و $t_x>۱$ (شکل ۵(آ) را ببینید).

(م۷) $n=۳$، $l=۱$، انــدازه گــراف تــوری L-شــکل زوج باشــد، $s=(m-k-۱.۱)$ و $t=(m-k.۳)$ (شکل ۵(ب) را ببینید).



شکل ۶: شرط (م۸) در G_L

(م۸) G_L زوج باشد و [$(m-k=۲$ و $n-l>۲)$ یا $(m-k>۲$ و $n-l=۲)$]. فــرض کنید $\{R_۱.R_۲\}$ یک افــراز عمودی یا افقی از G_L باشــد به‌طــوری که $R_۱$ یک زیرگراف توری ۳-مســتطیلی و $R_۲$ یــک زیرگراف توری ۲-مســتطیلی باشد. فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دقیقاً از طریق دو رأس u و v به هم متصل باشــند به‌طوری که $u.v \in R_۱$ فرض کنیــد $s'=s$ و $t'=t$، اگر $s' \notin R_۱$ (یا $t' \notin R_۱$)، آنــگاه $s'=u$ (یا $t'=u$) و $(R_۱.s'.t')$ در شــرط (م۲) صدق کند (شکل‌های ۶(آ) و ۶(ب) را ببینید).

(م۹) G_L زوج باشد و [$(m-k=۳$ و $n-l \geq ۳)$ یا $(m-k>۳$ و $n-l=۳)$]. فــرض کنید $\{R_۱.R_۲\}$ یک افراز عمودی، افقی یا L-شکل از G_L باشد به‌طوری که $R_۱$ یک زیرگراف توری ۳-مستطیلی و $R_۲$

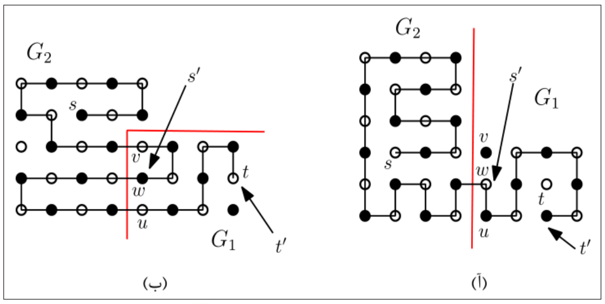
(الف) یک زیرگراف توری مستطیلی باشد، یا

(ب) یک زیرگراف توری L-شــکل باشد، در اینجا n و k فرد هستند.

فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دقیقاً از طریق ســه رأس w، u و v به هم متصل باشــند به‌طوری که $u.v.w \in R_۱$. فرض کنیــد $s'=s$ و $t'=t$، اگر $s' \notin R_۱$ (یــا $t' \notin R_۱$)، آنگاه $s'=w$ (یا $t'=w$) و $(R_۱.s'.t')$ در شــرط (م۲) صدق کند (شکل‌های ۷(آ) و ۷(ب) را ببینید).

تعریــف ۲-۳. مســئله مســیر همیلتونــی L-شــکل $(L(m.n;k.l).s.t)$ درصورتــی قابــل قبول اســت که ســازگار-رنگی باشد و $(L(m.n;k.l).s.t)$ هیچ کدام از شرایط ممنوعه (م۱) و (م۳) - (م۹) را برآورده نکند.

قضیـــه ۲-۴. $L(m.n;s.t)$ بین دو رأس s و t مســـیر



شکل ۷: شرط (م۹) در G_L

همیلتونی دارد، اگر و فقط اگر $(L(m.n;k.l).s.t)$ قابل قبول باشد [۱۵].

قضیه ۲-۵. فرض کنید $P(L(m.n;k.l).s.t)$ مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول بین دو رأس معین s و t باشد، آنگاه مسیر همیلتونی $(L(m.n;k.l).s.t)$ در زمان خطی ساخته می‌شود [۱۵].

لم ۲-۳. فرض کنید $L(m.n;k.l)$ یک گراف توری L-شکل باشد. $L(m.n;k.l)$ دور همیلتونی دارد اگر و فقط اگر $|V_B|=|V_W|$، $m-k>1$ و $n-l>1$ [۱۵].

لم ۲-۴. فرض کنید $L(m.n;k.l)$ یک گراف توری L-شکل باشد. فرض کنید $m-k>1$، $n-l>1$ و $||V_B|-|V_w||=1$ باشد. آنگاه طول طولانی‌ترین دور در $L(m.n;k.l)$ برابر با $mn-kl-1$ [۲۰].

کشاورز کوهجردی و باقری [۱۴] برای مسئله طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توری L-شکل شرایط زیر را ثابت کردند.

(ش۴) $(G_L.s.t)$ سازگار-رنگی است و هیچ یک از شرایط (م۱) و (م۳) - (م۹) برقرار نیست.

(ش۵) هیچ کدام از شرایط (م۳*)، (م٤*)، (م٦*) و (شم۱*) برقرار نیست و

(۱) اندازه $L(m.n;k.l)$ زوج است و s و t همرنگ هستند.

(۲) اندازه $L(m.n;k.l)$ فرد است و s و t رنگ های متفاوت دارند.

(ش۶) هیچ کدام از شرایط (م۳*)، (م٤*)، (م٥*) و (م٦*) برقرار نیست.

(۱) اندازه $L(m.n;k.l)$ فرد است و s و t سیاه رنگ هستند.

(۲) $(G_L.s.t)$ سازگار-رنگی است و یکی از شرایط (م۷*) و (م۳) - (م۹) برقرار است.

در اینجا، (م۳*) - (م۷*) و (شم۱) به صورت زیر تعریف می‌شود.

(م۳*) $n-l=1$، $m-k>1$، $t_y\leq m-k$، $t_y=n$، $m-1\leq t_x\leq m-k$ و $s\neq(m-k.n)$.

(م٤*) $n-l=1$، $m-k\geq 1$، $s_y=t_y=n$ و $s_x.t_x\geq m-k$.

(م٥*) $m-k=1$، $n-l=1$، $t_x>1$ و $s_y\leq 1$.

(م٦*) $n-l=2$، $m-k>l$ و $[m-k\leq s_x.t_x\leq m-1)$ و $[(s_x=t_x)$ یا $(s_x+1=t_x)]$ یا $(s=(m-k-l.n))$ و $(t=(m-k.n-l)]$.

(م۷*) اندازه G_L فرد، s و t سفید رنگ، $\{s.t\}$ یک برش رأسی و $[s_x=1$ یا $t_x=m]$.

(شم۱*) $k.l>1$، $n-l=2$، $m-k=2$، $s=(1.l)$ و $t=(2.n)$.

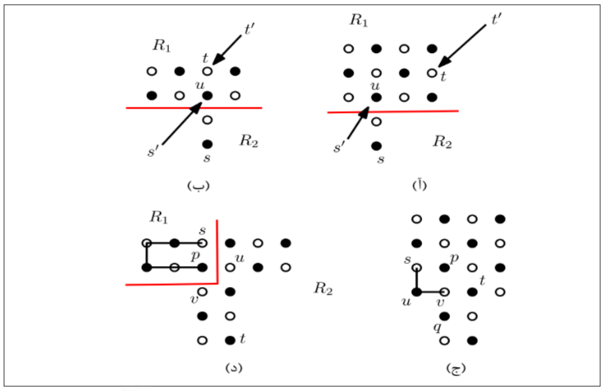
آن‌ها حدهای بالایی زیر را برای طول طولانی‌ترین مسیرها در گراف توری L-شکل ثابت کردند.

$$\hat{U}(L(m,n;k,l),s,t)=\begin{cases}\hat{U}(G',s,t); & \text{اگر (م۳*)}\\ t_x-s_x+1; & \text{اگر (م۴*)}\\ n-s_y+t_x; & \text{اگر (م۵*)}\\ \max(\hat{U}(G',s,t),2m-t_x-s_x+2); & \text{اگر (م۶*)}\\ mn-kl-3; & \text{اگر (شم۱*)}\\ mn-kl; & \text{اگر (ش۴)}\\ mn-kl-1; & \text{اگر (ش۵)}\\ mn-kl-2; & \text{اگر (ش۶)}\end{cases}$$

در اینجا، $G'=R(t_x.n)$ اگر $t_x=m-k$؛ در غیر این صورت $G'=L(t_x.n;t_x-(m-k).l)$.

قضیه ۲-۶. در گراف توری L-شکل $L(m.n;k.l)$ طولانی‌ترین مسیر بین هر دو رأس s و t را می‌توان در زمان خطی یافت و طول آن یعنی $\hat{L}(L(m.n;k.l).s.t)$ برابر با $\hat{U}(L(m.n;k.l).s.t)$.

اکنون شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین s و t در گراف توری T-شکل را به‌دست می‌آوریم، موقعیت قرار گرفتن رئوس s و t در G_T شامل ٤ حالت زیر است:



شکل ۸: شرایط (م۱۰)، (م۱۱) و (م۱۲) در G_T

۱- $s_x.t_x \le m-k_۲$

۲- $s_x \le k_۱$ و $t_x > m-k_۲$

۳- $k_۱+۱ \le s_x \le m-k_۲$ و $t_x > m-k_۲$

٤- $s_x.t_x > m-k_۲$

بنابر تقارن تنها حالت‌های ۱و۲ را در نظر می‌گیریم.

در ادامه مقاله، حالتی که $k_۱>۱$، $k_۲>۱$، $l_۱>۱$، $l_۲>۱$ و $l_۱=l_۲$ است را در نظر می‌گیریم.

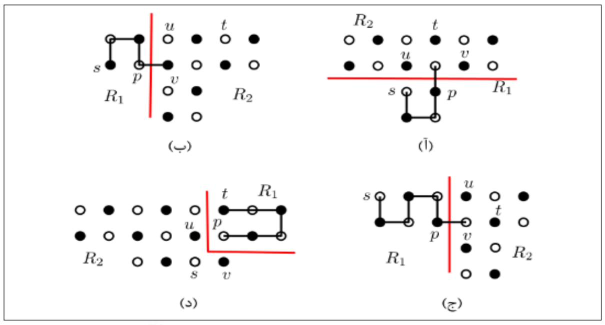
فرقانی و کشاورز کوهجردی ثابت کردند علاوه برشرایط (م۱) و (م۳) اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه در گراف توری T-شکل بین s و t مسیر همیلتونی وجود ندارد [۱۱ و ۱۲].

(م۱۰) فرض کنید $\{R_۱.R_۲\}$ یک افراز عمودی یا افقی از گراف توری T-شکل باشد، به‌طوری که $R_۱$ یک گراف توری ۲-مستطیلی یا ۳-مستطیلی و $R_۲$ یک زیرگراف توری ۱-مستطیلی باشد. فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ از طریق یک رأس u به هم متصل می‌باشند. به‌طوری که $u \in R_۱$ و فرض کنید $s'=s$ و $t'=t$ باشد. اگر $s' \notin R_۱$ یا $t' \notin R_۱$، آنگاه $s'=u$ یا $t'=u$ و $(R_۱.s'.t')$ در شرط (م۱) و (م۲) صدق می‌کند، شکل‌های ۸(آ) و ۸(ب) را ببینید.

(م۱۱) $n-l_۱>۳$، $k_۱=۱$، $m-k_۱-k_۲=۲$، $t=(۳.n-l_۱)$ و $s=(۱.n-l_۱-۱)$ (شکل ۸(ج) را ببینید).

(م۱۲) $\{s.t\}$ برش رأسی نباشند، $n-l_۱=۲$، $m-k_۱-k_۲=۲$ و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(الف) $s=(k_۱+۱.۱)$، $t_x \le m-k_۲$ و $t_y > n-l_۱$ (شکل ۸(د) را ببینید).



شکل ۹: شرایط (م۱۲) و (م۱۳) در G_T

(ب) $s_y > n-l_۱$، $s_x \le m-k_۲$ و $t=(k_۱+۲.۱)$ (شکل ۹ (الف) را ببینید).

(ج) $s_x \le k_۱$، $t_x > k_۱+۱$، $s_y.t_y \le n-l_۱$ و [(s سفید باشد و $k_۱$ فرد باشد) یا (s سیاه باشد و $k_۱$ زوج باشد)] (شکل‌های ۹(ب) و ۹(ج) را ببینید).

(م۱۳) m، $k_۱$، $k_۲$ و $m-k_۱-k_۲$ زوج باشند، $n=۳$، $l_۱=۱$، $n-l_۱>۱$ و[($s=(k_۱+۱.۱)$ و $t=(k_۱+۲.n)$) یا ($s=(m-k_۲-۱.۳)$ و $t=(m-k_۲.۱)$)] (شکل ۹(د) را ببینید).

(م۱۴) m و k زوج باشند، $n-l_۱=۳$، s سیاه باشد، $m-k_۱-k_۲>۲$ و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(الف) $s_x \le k_۱$ و $t_x > k_۱$ (شکل ۱۰(آ) را ببینید).

(ب) $s_x.t_x \le k_۱$ و [(s_y فرد باشد و $t_x > s_x+۱$) یا (s_y زوج باشد و $t_x > s_x$)] (شکل ۱۰(ب) را ببینید).

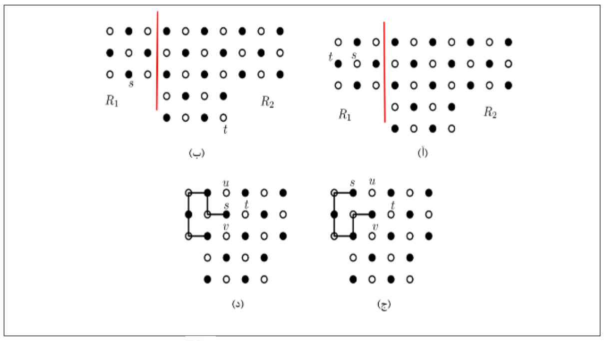
(ج) $k_۲$ فرد باشد، $m-k_۱-k_۲=۴$، $l_۱$ زوج باشد، $s_y.t_y \le n-l_۱$، $k_۱+۱ \le s_x.t_x \le m-k_۲$ و [(s_y فرد باشد و $t_x > s_x+۱$) یا (s_y زوج باشد و $t_x > s_x$)] (شکل‌های ۱۰(ج) و ۱۰(د) را ببینید).

(م۱۵) m و $l_۱$ فرد باشد، n زوج باشد، $n-l_۱>۲$، s سفید باشد، $m-k_۱-k_۲=۳$ و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

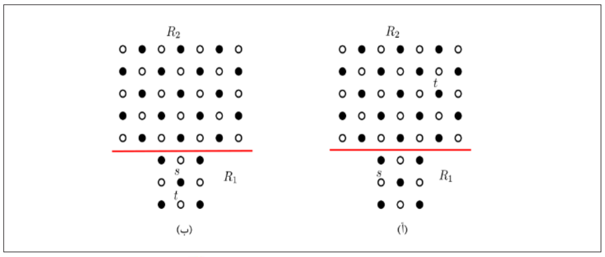
(الف) و $s_y > n-l_۱$ (شکل ۱۱(آ) را ببینید).

(ب) $s_y.t_y > n-l_۱$، $t_y > s_y$ و [(s_x فرد باشد و $|s_y-t_y|>۱$) یا (s_x زوج باشد و $|s_y-t_y| \ge ۱$)] (شکل ۱۱(ب) را ببینید).

(م۱۶) فرض کنید ($m-k_۱-k_۲=۲$ و $n-l_۱=۳$)



شکل ۱۰: شرط (م۱۴) در G_T



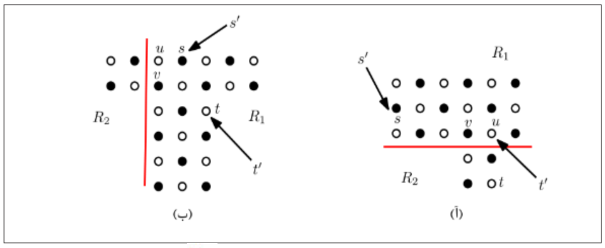
شکل ۱۱: شرط (م۱۵) در G_T.

یا $(n-l_1=2$ و $m-k_1-k_2=3)$ باشد. فرض کنید $\{R_1,R_2\}$ یک افراز عمودی یا افقی از G_T باشد بهطوری که R_1 یک زیرگراف توری ۲–مستطیلی باشد. فرض کنید R_1 و R_2 دقیقاً از طریق u و v به هم متصل باشند، به‌طوری که $u,v\in R_1$ باشد. فرض کنید $s'=s$ و $t'=t$، اگر $s'\notin R_1$ یا $t'\notin R_1$)، آنگاه $s'=u$ (یا $t'=u$) و (R_1,s',t') در شرط (م۲) یا (م۸) صدق می‌کند (شکل‌های ۱۲(آ) و ۱۲(ب) را ببینید).

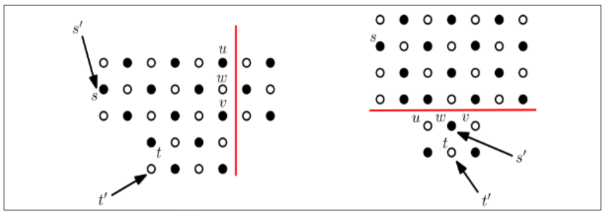
(م۱۷) فرض کنید $m-k_1-k_2=3)$، $n-l_1>2$ و l_1 زوج باشد) یا $(m-k_1-k_2>2$، $n-l_1=3$ و k_1 زوج باشد) فرض کنید $\{R_1,R_2\}$ یک افراز عمودی یا افقی از G_T باشد، به‌طوری که R_1 و R_2 زوج باشند. فرض کنید R_1 و R_2 دقیقاً از طریق سه رأس u، v و w به هم متصل باشند، به‌طوری که $u,v,w\in R_1$ باشد. فرض کنید $s'=s$ و $t'=t$، اگر $s'\notin R_1$ (یا $t'\notin R_1$)، آنگاه $s'=w$ (یا $t'=w$) و (R_1,s',t') در شرط (م۲) یا (م۹) صدق می‌کند (شکل‌های ۱۳(آ) و ۱۳(ب) را ببینید).

لم ۲–۵. G_T دور همیلتونی دارد، اگر و فقط اگر اندازه آن زوج، $n-l_1>1$، $n-l_2>1$ و $m-k_1-k_2>1$ باشد [۱۱ و ۱۲].

قضیه ۲–۷. فرض کنید G_T یک گراف توری T–شکل



شکل ۱۲: شرط (م۱۶) در G_T.



شکل ۱۳: شرط (م۱۷) در G_T

با اندازه زوج و s و t دو رأس آن باشد، $HP(G_T,s,t)$ وجود دارد اگر و فقط اگر s و t در G_T سازگار–رنگی باشد و (G_T,s,t) در شرایط (م۱)، (م۳) و (م۱۰) – (م۱۷) قرار نگیرد [۱۱ و ۱۲].

قضیه ۲–۸. (G_T,s,t) یک مسیر همیلتونی دارد، اگر و فقط اگر (G_T,s,t) قابل قبول باشد [۱۱ و ۱۲].

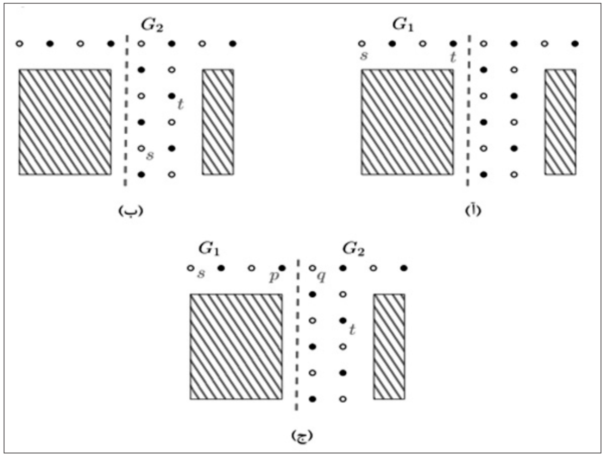
قضیه ۲–۹. فرض کنید G_T یک گراف توی T–شکل با اندازه زوج و s و t دو رأس متمایز آن باشد، آنگاه مسئله مسیر همیلتونی بین s و t و دور همیلتونی در زمان خطی حل می‌شود [۱۱ و ۱۲].

۳– حد بالا برای طولانی‌ترین مسیر در گراف توری T–شکل با اندازه زوج

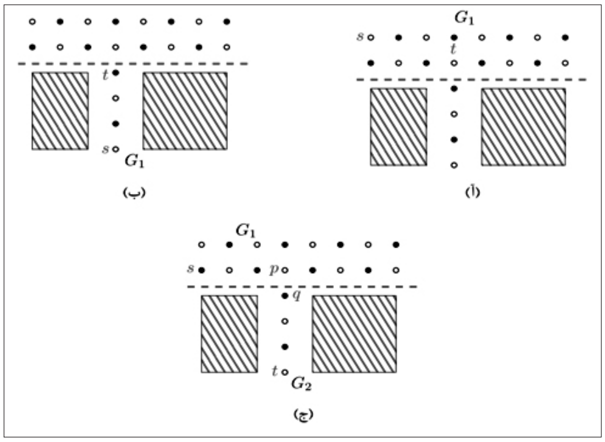
همان‌طور که قبلا گفته شد $HP(G_T,s,t)$ وجود ندارد اگر یکی از شرایط ممنوعه برقرار باشد یا (G_T,s,t) سازگار–رنگی نباشد. فرض کنید G_T یک گراف توری T–شکل و s و t دو راس آن باشد. در این بخش، حدهای بالایی را برای طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t به‌دست می‌آوریم. در سراسر این مقاله از نماد (ح) برای نشان دادن حد بالا استفاده می‌کنیم.

لم‌های زیر شرایط حد بالا را برای طولانی‌ترین مسیر بین s و t را برای گراف توری T–شکل بیان می‌کند.

(ح۰) اگر (G_T,s,t) سازگار–رنگی باشد و در هیچ کدام



شکل ۱۴: (آ) (ح۱)، (ب) (ح۲) و (ج) (ح۳)



شکل ۱۵: (آ) (ح۴)، (ب) (ح۵) و (ج) (ح۶)

از شـــرایط ممنوعه (م۱)، (م۳)، (م۱۰) و (م۱۷) صدق نکند، آنگاه طولانی‌ترین مسیر برابر با مسیر همیلتونی است.

لم ۳-۱. فرض کنید $n - l_1 = 1$ باشـــد، آنگاه شـــرایط زیر برای طولانی‌ترین مسیر در $(G_T.s.t)$ برقرار است.

(ح۱) اگر $s_x.t_x \le k_1$ باشـــد، آنگاه طولانی‌ترین مسیر بیـــن s و t نمی‌تواند بیشـــتر از طول طولانی‌ترین مســـیر در $\widehat{U}(G_1.s.t)$ باشـــد، شـــکل ۱۴(آ) را ببینیـــد. در اینجا، $G_1 = R(k_1.n - l_1)$.

(ح۲) اگر $s_x.t_x > k_1$ باشـــد، آنگاه طولانی‌ترین مسیر بیـــن s و t نمی‌تواند بیشـــتر از طول طولانی‌ترین مســـیر در $\widehat{U}(G_2.s.t)$ باشـــد. شـــکل ۱۴(ب) را ببینید. در اینجا، $G_2 = L(m - k_1.n; k_2.l_2)$.

(ح۳) اگر $s_x \le k_1$ و $t_x > k_1$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین مســـیر بین s و t نمی‌تواند بیشـــتر از طـــول طولانی‌ترین مســـیر در $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t)$ باشـــد، شـــکل ۱۴(ج) را ببینیـــد. در اینجـــا، $G_1 = R(k_1.n - l_1)$، $G_2 = L(m - k_1.n; k_2.l_2)$، $p = (k_1 + 1.1)$، $q \in G_1$، $p \in G_2$ و $p \sim q$.

اثبـــات. شـــکل‌های ۱۴(الـــف)، ۱۴(ب) و ۱۴(ج) را در نظر بگیرید، فرض کنید $w = (k_1.1)$ باشـــد. به وضوح با حذف w گراف G_T بـــه دو زیرگراف $G_1 = R(k_1 - 1.1)$ و $G_2 = L(m - k_1.n; k_2.l_2)$ تقســـیم می‌شود. در شرط (ح۱)، چون $n - l_1 = 1$ و $s_x.t_x \le k_1$ اســـت، به آســـانی می‌تـــوان دید که طولانی‌ترین مســـیر بیـــن s و t برابر با طولانی‌ترین مسیر در $G_1 = G_1 \cup w$ است. در شرط (ح۲)، چون $s_x.t_x > k_1$ است، به وضوح طولانی‌ترین مسیر بین s و t برابر با طولانی‌ترین مســـیر در G_2 اســـت. در شرط (ح۳)، چون $s_x \le k_1$ و $t_x > k_1$ است، به آسانی می‌توان مشاهده کرد که طولانی‌ترین مسیر بین s و t باید از رأس w عبور کند و به رأس t ختم شود. بنابراین طول طولانی‌ترین مسیر برابر با $\widehat{U}(G_1 \cup w.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t)$. ■

لـــم ۳-۲. فرض کنید $m - k_1 - k_2 = 1$ باشـــد، آنگاه شرایط زیر برای طولانی‌ترین مسیر در $(G_T.s.t)$ برقرار است.

(ح۴) اگر $s_y.t_y \le n - l_1$ باشـــد، آنـــگاه طولانی‌ترین مســـیر بین s و t نمی‌تواند بیشـــتر از طـــول طولانی‌ترین مسیر در $\widehat{U}(G_1.s.t)$ باشد، شکل ۱۵(آ) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(m.n - l_1)$.

(ح۵) اگر $s_y.t_y > n - l_1$ باشـــد، آنـــگاه طولانی‌ترین مســـیر بین s و t نمی‌تواند بیشـــتر از طـــول طولانی‌ترین مسیر در $\widehat{U}(G_1.s.t)$ باشد، شکل ۱۵(ب) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(m - k_1 - k_2.l_1)$.

(ح۶) اگر $s_y \le n - l_1$ و $t_y > n - l_1$.

آنگاه طولانی‌ترین مســـیر بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مســـیر در $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t)$ باشد، شکل ۱۵(ج) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(m.n - l_1)$، $G_2 = R(m - k_1 - k_2.l_1)$، $p = (k_1 + 1.n - l_1)$، $p \in G_1$، $q \in G_2$ و $p \sim q$.

اثبات. اثبات مشـــابه لم ۳-۱ اســـت، شـــکل‌های ۱۵(آ)،

۱۵(ب) و ۱۵(ج) را ببینید. ■

لم ۳-۳. فرض کنید $n-l_1=2$ ، $\{s.t\}$ برش رأسی و $s_x \neq 1$ باشد، آنگاه شرایط زیر برای طولانی‌ترین مسیر در $(G_T.s.t)$ برقرار است.

(ح۷) اگر $s_x.t_x < k_1+1$ و $s_x = t_x$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل‌های ۱۶(آ) و ۱۶(ب) را ببینید. در اینجا،

$G_1 = R(s_x.n-l_1)$

و $G_2 = T(m-s_x+1.n;k_1-s_x+1.l_1;k_2.l_2)$.

(ح۸) اگر $s_x = t_x = k_1+1$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل‌های ۱۷(آ) و ۱۷(ب) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(s_x.n-l_1)$ و $G_2 = L(m-s_x+1.n;k_2.l_2)$.

(ح۹) اگر $s_x.t_x < k_1+1$ و $s_x \neq t_x$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل‌های ۱۸(آ) و ۱۸(ب) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(s_x+1.n-l_1)$ و $G_2 = T(m-s_x+1.n;k_1-s_x+1.l_1;l_2.k_2)$.

(ح۱۰) اگر $s_y.t_y \le 2$، $k_1 \le s_x.t_x \le k_1+2$، $s_x \neq t_x$ و $[(t_x = k_1+1.s_x = k_1)$ یا $m-k_1-k_2=2)$ $(t_x = k_1+2$ و $s_x = k_1+1)]$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل ۱۹ را ببینید.

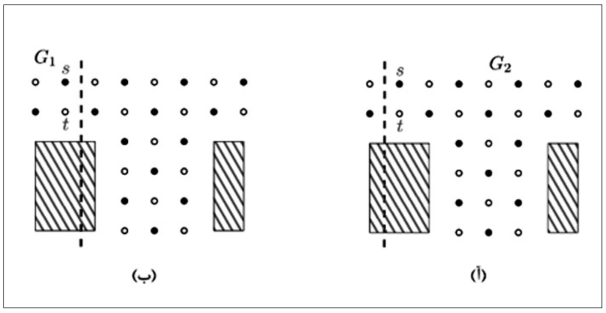
در اینجا، $G_1 = L(s_x+1.n;k_1.l_1)$

و $G_2 = T(m-s_x+1.n;k_1-s_x+1.l_1;k_2.l_2)$ اگر $s_x = k_1$ باشد، در غیر این صورت $G_2 = L(m-k_1.n;k_2.l_2)$.

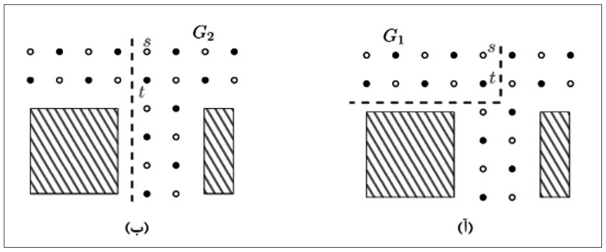
اثبات. از آنجایی که $\{s.t\}$ برش رأسی است، بنابراین با حذف s و t گراف به ۲ زیرگراف تقسیم می‌شود و یک مسیر ساده بین s و t تنها از یکی از این مولفه‌ها می‌تواند عبور کند. بنابراین طول مسیر نمی‌تواند از اندازه طولانی‌ترین مسیر در هر زیرگراف بیشتر شود، شکل‌های ۱۸،۱۷،۱۶ و ۱۹ را ببینید.■

لم ۳-۴. فرض کنید $m-k_1-k_2=2$، $n-l_1>2$ و $n-l_2>2$ و $\{s.t\}$ برش رأسی باشد. فرض کنید $\max(s_x.t_x) \neq n$ باشد، آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_T.s.t)$ بصورت زیر است.

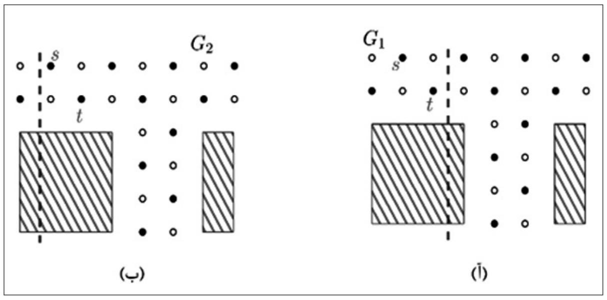
(ح۱۱) اگر $s_y.t_y > n-l_1$ باشد، آنگاه طولانی‌ترین



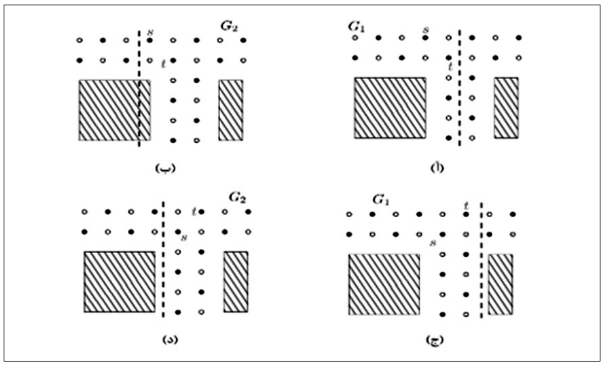
شکل ۱۶: حد بالا برای حالتی که $s_x.t_x < k_1+1$ و $s_x = t_x$



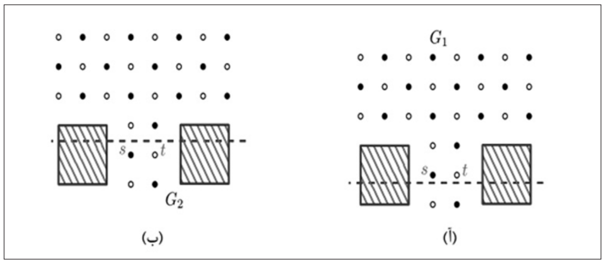
شکل ۱۷: حد بالا برای حالتی که $s_x = k_1+1$ و $s_x = t_x$



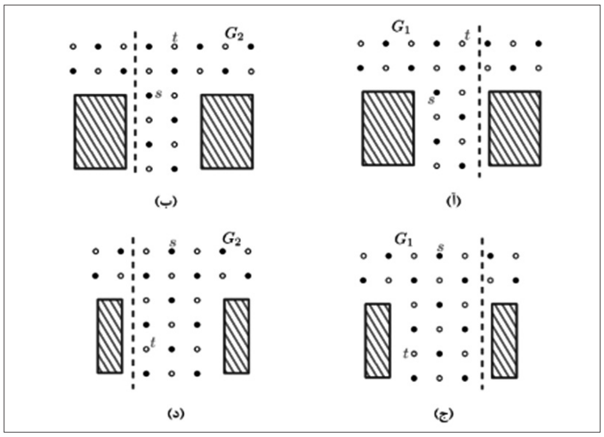
شکل ۱۸: حد بالا برای حالتی که $s_x.t_x < k_1+1$ و $s_x \neq t_x$.



شکل ۱۹: حد بالا برای (آ) و (ب) حالتی که $s_x = k_1$ و (ج) و (د) حالتی که $s_x = k_1+1$



شکل ۲۰: حد بالا برای حالتی که $s_y.t_y > n - l_1$.



شکل ۲۲: حد بالا برای (آ) و (ب) حالتی که $s_y > 2$ و $t = (m - k_2.1)$ و (ج) و (د) حالتی که $t_y > n - l_1$ و $s = (k_1 + 2.1)$

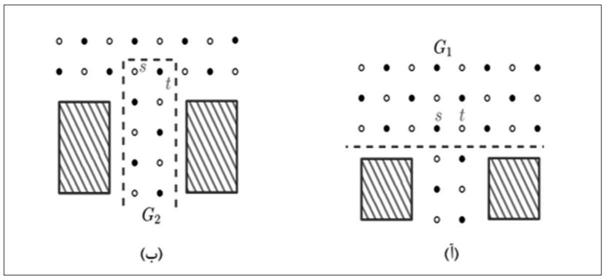
مسیر بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل‌های ۲۰(آ) و ۲۰(ب) را ببینید. در اینجا، $G_1 = T(m.n';k_1.l_1';k_2.l_2')$، $n' = \min(s_y.t_y)$، $l_1' = n' - (n - l_1)$، $l_2' = n' - (n - l_2)$ و $G_2 = R(m - k_1 - k_2.n - s_y + 1)$.

(ح۱۲) اگر $s_y = t_y = n - l_1$ باشد، آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند بیشتر از طول طولانی‌ترین مسیر در $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ باشد، شکل‌های ۲۱(آ) و ۲۱(ب) را ببینید. در اینجا، $G_1 = R(m.n - l_1)$ و $G_2 = R(m - k_1 - k_2.n - s_y + 1)$.

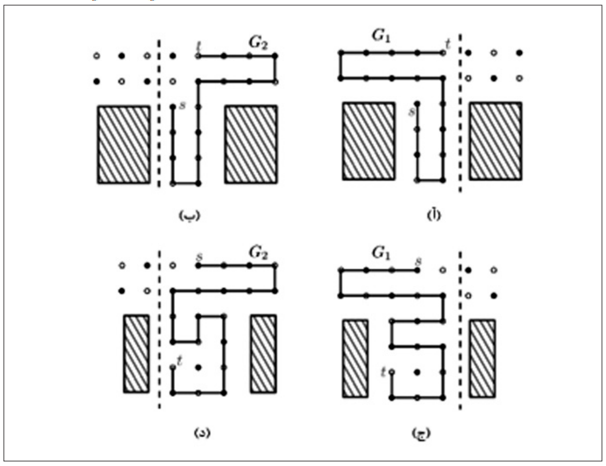
اثبات. اثبات مشابه لم ۳-۳ است، شکل‌های ۲۰ و ۲۱ را ببینید. ■

(ح۱۳) $n - l_1 = 2$، $n - l_2 = 2$ و [($s_y > 2$، $m - k_1 - k_2 = 2$ و $(t = (m - k_2.1)$ یا $m - k_1 - k_2 = 3$، $t_y > n - l_1$، $s = (k_1 + 2.1)$، $color(t) = white$ و شرط (م۱۶) حالت (ب) رخ دهد)].

لم ۳-۵. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل و s و t دو رأس آن باشد. اگر شرط (ح۱۳) رخ دهد،



شکل ۲۱: حد بالا برای حالتی که $s_y = t_y > n - l_1$.



شکل ۲۳: ساخت طولانی‌ترین مسیر در (ح۱۳).

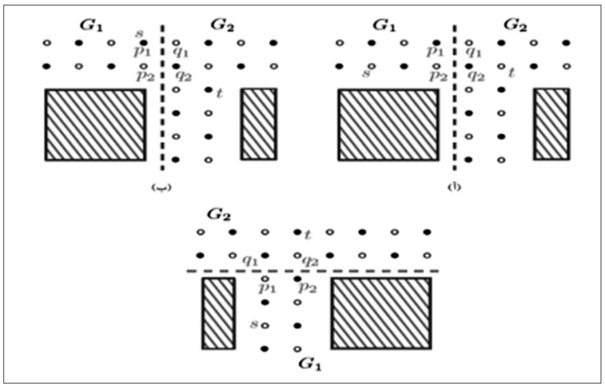
آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند از $\max\{\widehat{U}(G_1.s.t).\widehat{U}(G_2.s.t)\}$ بیشتر شود.

اثبات. فرض کنید $\{G_1.G_2\}$ یک جداسازی عمودی از G_T باشد، شکل ۲۲ را ببینید. در اینجا، $G_1 = L(m - k_2.n;k_2.l_1)$ و $G_2 = L(m - k_1.n;k_2.l_2)$.

طولانی‌ترین مسیر بین s و t را در G_1 و G_2 به‌دست می‌آوریم. از مقایسه طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.t)$ و $(G_2.s.t)$ طولانی‌ترین مسیر در کل گراف G_T به‌دست می‌آید، شکل ۲۳ را ببینید.

(ح۱۴) $m - k_1 - k_2 = 2$، $n - l_1 = 2$، $n - l_2 = 2$ و [(s و t همرنگ باشد و $s_x < k_1$ و $(t = (m - k_2.2))$ یا $([(t = (m - k_2.3)$ و $s = (k_1.1))]$ یا (s و t غیر همرنگ و شرط (م۱۲) رخ دهد)] .

لم ۳-۶. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل و s و t دو رأس آن باشد. اگر (ح۱۴) رخ دهد، آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند از $\max\{\widehat{U}(G_1.s.p_1) + \widehat{U}(G_2.q_1.t).\widehat{U}(G_1.s.p_2) + \widehat{U}(G_2.q_2.t)\}$ بیشتر شود.



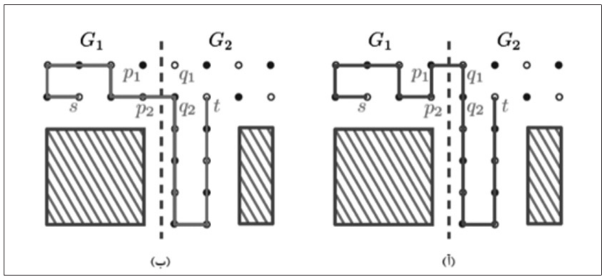
شکل ۲۴: حد بالا برای (آ) حالتی که $s_x < k_۱$ و $t = (m - k_۲.۲)$ و (ب) $s = (k_۱.۱)$ و $t = (m - k_۲.۳)$ و (ج) (م۱۲)

اثبات. فرض کنید $\{G_۱.G_۲\}$ یک جداسازی افقی یا عمودی از G_T باشد. به‌طوری که $s \in V(G_۱)$ و $t \in V(G_۲)$ باشد، شکل‌های ۲۴(آ)، ۲۴(ب) و ۲۴(ج) را ببینید. ■

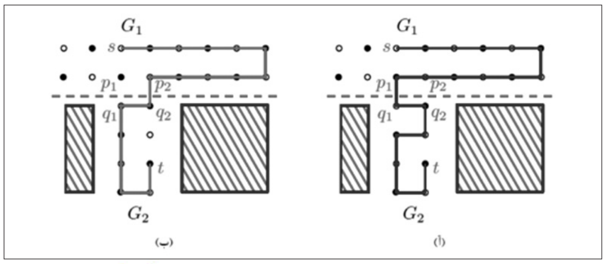
دراینجا، $G_۱ = R(k_۱.n - l_۱)$ اگر $s_x < k_۱$ یا $G_۱ = R(m.n - l_۱)$ اگر $s_x > k_۱$ و $s_y \le ۲$ یا $G_۱ = R(m - k_۱ - k_۲.l_۱)$ اگر $s_x > k_۱$ و $s_y > ۲$ باشد. $G_۲ = L(m - k_۱.n; k_۲.l_۲)$ اگر $s_x < k_۱$ یا $G_۲ = R(m.n - l_۱)$ اگر $s_y > ۲$ و $s_x > k_۱$ یا $G_۲ = R(m - k_۱ - k_۲.l_۱)$ اگر $s_y \le ۲$ و $s_x > k_۱$ باشد. همچنین $p_۱.p_۲ \in G_۱$، $q_۱.q_۲ \in G_۲$، $p_۱ \sim q_۱$ و $p_۲ \sim q_۲$

در حالتی که $s_x \le k_۱$ یا (s و t غیر همرنگ و $s_y.t_y \le n - l$) باشد، یک برش عمودی داریم. طولانی‌ترین مسیر G_T که از رأس s در $G_۱$ شروع می‌شود. از تعدادی رئوس $G_۱$ می‌گذرد و از رأس $p_۱$ (یا $p_۲$) از $G_۱$ خارج می‌شود و از رأس $q_۱$ (یا $q_۲$) وارد $G_۲$ می‌شود. از تعدادی رئوس $G_۲$ می‌گذرد و به t ختم می‌شود. در اینجا دو طولانی‌ترین مسیر داریم. رنگ آبی شامل طولانی‌ترین مسیر در $(G_۱.s.p_۱) + (G_۲.q_۱.t)$ و رنگ قرمز شامل طولانی‌ترین مسیر در $(G_۱.s.p_۲) + (G_۲.q_۲.t)$ است که با مقایسه آن‌ها می‌توان طولانی‌ترین مسیر در کل گراف G_T را به‌دست آورد، شکل‌های ۲۵(آ) و ۲۵(ب) را ببینید.

در حالتی که s و t غیرهمرنگ، $s_y \le n - l$ و $t_y > n - l$ باشند، یک برش افقی داریم. طولانی‌ترین مسیر G_T که از رأس s در $G_۱$ شروع می‌شود، از تعدادی



شکل ۲۵: ساخت طولانی‌ترین مسیر (ح۱۴) در حالتی که $s_x \le k_۱$



شکل ۲۶: ساخت طولانی‌ترین مسیر (ح۱۴) در حالت s و t غیرهمرنگ.

رئوس $G_۱$ می‌گذرد و از رأس $p_۱$ (یا $p_۲$) از $G_۱$ خارج می‌شود و از رأس $q_۱$ (یا $q_۲$) وارد $G_۲$ می‌شود. از تعدادی رئوس G_T می‌گذرد و در نهایت به t ختم می‌شود. در اینجا دو طولانی‌ترین مسیر داریم. رنگ آبی شامل طولانی‌ترین مسیر در $(G_۱.s.p_۱) + (G_۲.q_۱.t)$ و رنگ قرمز شامل طولانی‌ترین مسیر در $(G_۱.s.p_۲) + (G_۱.q_۲.t)$ است که با مقایسه آن‌ها می‌توان طولانی‌ترین مسیر را در کل گراف G_T به‌دست آورد، شکل‌های ۲۶(آ) و ۲۶(ب) را ببینید. ■

(ح۱۵) $(G_T.s.t)$ در هیچ‌یک از شرایط (ح۱) تا (ح۱۴) قرار ندارد و $color(s) = color(t)$.

لم ۳-۷. اگر شرط (ح۱۵) رخ دهد، آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند از $|G_T| - ۱$ بیشتر شود. ■

اثبات. می‌دانیم که G_T دو بخشی است و رنگ رئوس هر مسیر باید بین سیاه و سفید متناوب باشد، پس هر مسیر بین دو رأس همرنگ باید طول فرد داشته باشد و چون G_T زوج است، طول آن نمی‌تواند از $|G_T| - ۱$ بیشتر شود.

(ح۱۶) $(G_T.s.t)$ در یکی از شرایط (م۱۰) تا (م۱۷) صدق کند و هیچ یک از شرایط (ح۱) تا (ح۱۵) برقرار نباشد.

لم ۳-۸. اگر شرط (ح۱۶) برقرار باشد، آنگاه طول طولانی‌ترین مسیر بین s و t نمی‌تواند از $|G_T| - ۲$ بیشتر شود.

اثبات. از آنجایی که G_T دارای اندازه زوج است، پس

$mn-k_1l_1-k_2l_2$ باید زوج باشـــد و s و t باید رنگ‌های متفاوت داشته باشـــند، پس هر مسیر بین باید دارای طول زوج باشـــد و به دلیـــل قضیه ۲-۸ این طـــول نمی‌تواند از $|G_T|-2$ بیشتر باشد. ■

قضیه ۳-۱. کران بالایی روی طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_T.s.t)$ "یعنی $\widehat{U}(G_T.s.t)$ " با توابع زیر داده می‌شود.

$$\hat{U}(G_T)=\begin{cases}\hat{U}(G_1,s,t); & \text{اگر (ح۱)،(ح۲)،(ح۴)و(ح۵)}\\ \hat{U}(G_1,s,p)+\hat{U}(G_2,q,t); & \text{اگر (ح۳) و (ح۶)}\\ \max\{(G_1,s,t),(G_2,s,t)\}; & \text{اگر (ح۷) تا (ح۱۳)}\\ \max\{\hat{U}(G_1,s,p_1)+\hat{U}(G_2,q_1,t),\hat{U}(G_1,s,p_2)+\hat{U}(G_2,q_2,t)\}; & \text{اگر (ح۱۴)}\\ |G_T|-1; & \text{اگر (ح۱۵)}\\ |G_T|-2; & \text{اگر (ح۱۶)}\\ |G_T|; & \text{اگر (ح۰)}\end{cases}$$

اثبات. واضح اســـت که $(G_T.s.t)$ باید یکی از شرایط کران بالایی (ح۰) تا (ح۱٦) را داشته باشد. بنابر قضیه وقتی (ح۰) برقرار است، طول طولانی‌ترین مسیر همیلتونی برابر با $\widehat{U}(G_T.s.t)=mn-k_1l_1-k_2l_2$.بنابر لم‌های ۱-۳ تا ۳-۸ کران‌های بالا برای طولانی‌ترین مسیر برقرار است. ■

۴- پیدا کـــردن طولانی‌ترین مســـیر در گراف توری T-شکل با اندازه زوج

یک الگوریتم زمان‌خطی برای یافتن طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس s و t در این بخش ارائه شده است. ما شرایط (ح۰) تا (ح۱٦) را درنظر می‌گیریم که در آن مسیرهمیلتونی وجود ندارد. ایده به شـــرح زیر اســـت، ابتـــدا گراف توری داده شـــده را به زیرگراف‌های توری تقســـیم می‌کنیم که گراف‌های توری مســـتطیلی یا L-شـــکل هســـتند. سپس طولانی‌ترین مســـیر در گراف با ادغام طولانی‌ترین مسیر این زیرگراف‌ها ســـاخته می‌شـــود. ایدۀ بخش‌بندی گراف اصلی ممکن است ســـاده به‌نظر برسد، اما مسائلی وجود دارد که باید در نظر گرفته شـــود. به عبارت دیگر، شـــکل دقیق بخش‌بندی مهم است و باید به‌طور دقیق انجام شود.

لم‌های زیر نحوه ســـاختن طولانی‌ترین مسیر بین s و t را برای گراف توری T-شکل بیان می‌کند. ما فقط برای حالتی کـــه $k_1>1$ ،$k_2>1$ ،$l_1>1$ ،$l_2>1$ و $l_1=l_2$ برقرار باشد، روش ساخت طولانی‌ترین مسیر را بیان می‌کنیم.

لم ۴-۱. فرض کنید $(G_T.s.t)$ یکی از شـــرایط (ح۱)-(ح٦) را برآورده کند. آنگاه $\hat{L}(G_T.s.t)=\widehat{U}(G_T.s.t)$.

اثبات. حالت‌های زیر را برای اثبات در نظر بگیرید.

حالـــت ۱. فرض کنیـــد (ح۱)، (ح۲)، (ح٤) و (ح٥) برقرار باشـــد. بنابر لم‌های ۳-۱ و ۳-۲ طول طولانی‌ترین مســـیر در G_T بیـــن s و t برابـــر با $\widehat{U}(G_1.s.t)$ اســـت. دراینجا، $G_1=R(m_1.n_1)$ اگر (ح۱)، (ح٤) و (ح٥) برقرار باشد؛ در غیر این صورت $G_1=(m_1.n_1;k_1.l_1)$.

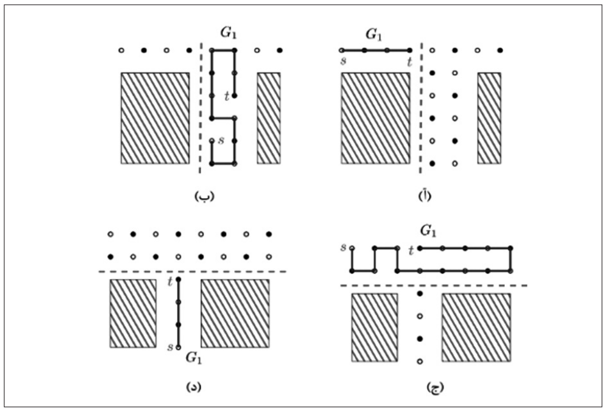
با اســـتفاده از الگوریتم [٥، ۱۳، ۱٤ و ۱٥] طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.t)$ ساخته می‌شود، شکل ۲۷ را ببینید.

حالـــت ۲. فرض کنید (ح۳) و (ح٦) برقرار باشـــد. بنابر لم‌هـــای ۳-۱ و ۳-۲ طول طولانی‌ترین مســـیر در G_T بین s و t برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p)+\widehat{U}(G_2.q.t)$ اســـت. دراینجا، $G_1=R(m_1.n_1)$ و $G_2=R(m_2.n_2)$ اگـــر (ح٦) برقرار باشد؛ در غیر این صورت $G_2=L(m_2.n_2;k_1.l_1)$.

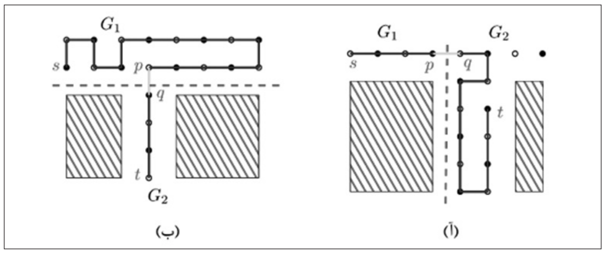
با اســـتفاده از الگوریتم [٥، ۱۳، ۱٤ و ۱٥] طولانی‌ترین مســـیر در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ ساخته می‌شود. سپس با اتصال دو رأس p و q، طولانی‌ترین مسیر در G_T ساخته می‌شود، شکل‌های ۲۸(آ) و ۲۸(ب) را ببینید. ■

لم ۴-۲. فرض کنید $(G_T.s.t)$ یکی از شـــرایط (ح۷) تا (ح۱۳) را برآورده کند. آنگاه $\hat{L}(G_T.s.t)=\widehat{U}(G_T.s.t)$.

اثبات. بنابر لم های ۳-۳، ۳-٤ و ۳-٥ طول طولانی‌ترین مسیر در G_T بین s و t برابر با $\max\{(G_1.s.t).(G_2.s.t)\}$ اســـت. دراینجـــا، $G_1=R(m_1.n_1)$ اگـــر (ح۷)، (ح۸)، (ح۹) و (ح۱۲) برقـــرار باشـــد، یـــا $G_1=(m_1.n_1;k_1.l_1)$ اگـــر (ح۱۰) و (ح۱۳) برقرار باشـــد، در غیـــر این صورت $G_1=T(m_1.n_2;k_1.l_1;k_2.l_2)$ و $G_2=R(m_2.n_2)$ اگـــر (ح۱۱) و (ح۱۲) بر قرار باشـــد، یا $G_2=(m_2.n_2;k_1.l_1)$ اگر (ح۸)، (ح۱۰) و $(s_x=k_1+1)$ و (ح۱۳) برقرار باشـــد، در غیـــر ایـــن صـــورت $G_2=T(m_2.n_2;k_1.l_1;k_2.l_2)$



شکل ۲۷: ساخت طولانی‌ترین مسیر در (G_1,s,t)



شکل ۲۸: ساخت طولانی‌ترین مسیر در (G_1,s,p) و (G_2,q,t)

$G_2 = T(m_2,n_2;k_1,l_1;k_2,l_2)$.

با استفاده از الگوریتم [۵، ۱۳، ۱۴ و ۱۵] طولانی‌ترین مسیر در (G_1,s,p) و (G_2,q,t) ساخته می‌شود. ■

لم ۴-۳. فرض کنید (G_T,s,t) شرط (ح۱۴) را برآورده کند. آنگاه $\hat{L}(G_T,s,t) = \hat{U}(G_T,s,t)$.

اثبات. بنابر لم ۳-۶ طول طولانی‌ترین مسیر در G_T بین s و t برابر با $\max\{(G_1,s,p_1)+(G_2,q_1,t),(G_1,s,p_2)+(G_2,q_2,t)\}$ است. در اینجا، $G_1 = R(m_1,n_1)$ و $G_2 = R(m_2,n_2)$

اگر $s_x > k_1$ و $s_y \le 2$ یا $s_x > k_1$ و $s_y > 2$ برقرار باشد، در غیر این صورت $G_2 = L(m_2,n_2;k_2,l_2)$ است. با استفاده از الگوریتم [۵، ۱۳، ۱۴ و ۱۵] طولانی‌ترین مسیر در (G_1,s,p_1)، (G_2,q_1,t)، (G_1,s,p_2) و (G_2,q_2,t) ساخته می‌شود. ■

لم ۴-۴. فرض کنید $s_x,t_x \le m-k_2$ و (G_T,s,t) شرط (ح۱۵) را برآورده کند. آنگاه $\hat{L}(G_T,s,t) = \hat{U}(G_T,s,t)$.

اثبات. دو حالت زیر را برای اثبات در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $(n-l_2>2)$ یا $(n-l_2=2$، $s \neq (m-k_2,1)$ و $t \neq (m-k_2,1))$.

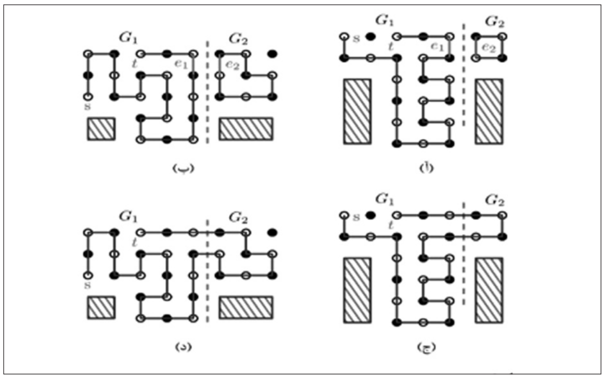
بنابر لم ۳-۷، طول طولانی‌ترین مسیر در بین G_T s و t برابر با $|G_T|-1$ است. فرض کنید $w=(m,1)$ و $color(s) \neq color(w)$ باشد. در اینجا یک برش عمودی داریم که گراف توری G_T را به دو زیرگراف تقسیم می‌کند. در اینجا، $G_1 = L(m-k_2,n_2;k_1,l_1)$ و $G_2 = R(k_2,n-l_2)$.

چون G_T زوج است، پس G_1 و G_2 هر دو زوج هستند یا هر دو فرد هستند. فرض کنید G_2 زوج باشد، G_2 طبق لم ۲-۱ دورهمیلتونی دارد و طبق لم ۲-۱ طول طولانی‌ترین دور در G_2 برابر با $LC(G_2)=|G_2|$ است. چون G_2 زوج است پس G_1 نیز زوج می‌شود. طبق شرط (ش۵) طول طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\hat{U}(G_1,s,t) = |G_1|-1$ است. فرض کنید G_2 فرد و $color(w)=c$ باشد، طبق لم ۲-۲ طول طولانی‌ترین دور در G_2 برابر با $LC(G_2)=|G_2|-1$ است. به وضوح G_1 یک زیرگراف فرد با رنگ اکثریت $\bar{c}$ است. همچنین چون $color(w) \neq color(s)$، بنابراین $color(s)=\bar{c}$ است. پس (G_1,s,t) سازگار-رنگی است. طبق شرط (ش۴) طول طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\hat{U}(G_1,s,t)=|G_1|$ است. به وضوح، $\hat{U}(G_1,s,t)+LC(G_2)=|G_T|-1$.

با استفاده از الگوریتم [۱۴ و ۱۵] طولانی‌ترین مسیر را در (G_1,s,t) به‌دست می‌آوریم. با استفاده از الگوریتم [۲۰] طولانی‌ترین دور را در G_2 به‌دست می‌آوریم، شکل‌های ۲۹(آ) و ۲۹(ب) را ببینید. طولانی‌ترین مسیر بین را در (G_1,s,t) را با طولانی‌ترین دور در G_2 از طریق دو یال موازی e_1 و e_2 که در شکل‌های ۲۹(آ) و ۲۹(ب) نشان داده شده است، ترکیب می‌کنیم و طولانی‌ترین مسیر را در (G_T,s,t) می‌سازیم، شکل‌های ۲۹(ج) و ۲۹(د) را ببینید.

حالت ۲. $n-l_2=2$ و $t=(m-k_2,1)$ یا $s=(m-k_2,1)$. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $t=(m-k_2,1)$ باشد.

بنابر لم ۳-۷ طول طولانی‌ترین مسیر در G_T بین s و t برابر با $|G_T|-1$ است. در اینجا یک برش عمودی داریم که گراف توری G_T را به دو زیرگراف $G_1 = L(m_1,n;k_1,l_1)$ و $G_2 = L(m-m_1,n;k_2,l_2)$ تقسیم می‌کند. در اینجا،



شکل ۲۹: (آ) و (ب) ساخت طولانی‌ترین مسیر و طولانی‌ترین دور به ترتیب در $(G_1.s.t)$ و G_2 و (ج) و (د) ترکیب طولانی‌ترین مسیر و طولانی‌ترین دور با استفاده از ترکیب دو یال موازی

$m_1 = t_x - 1$، $p = (m_1.n)$ اگر $s \neq (m_1.n)$ برقرار باشد، در غیراین صورت $p = (m_1.n - 1)$.

همچنین $s.p \in G_1$، $q.t \in G_2$ و $p \sim q$.

چون G_T زوج است، پس G_1 و G_2 هر دو زوج هستند یا هر دو فرد هستند. فرض کنید $s \neq (m_1.n)$ باشد. دراین حالت طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.p)$ طبق شرط(ش۵) برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1| - 1$.

$(G_2.q.t)$ طبق شرط(ش۴) سازگار-رنگی است و طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_2.q.t)$ طبق شرط(ش۴) برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2|$.

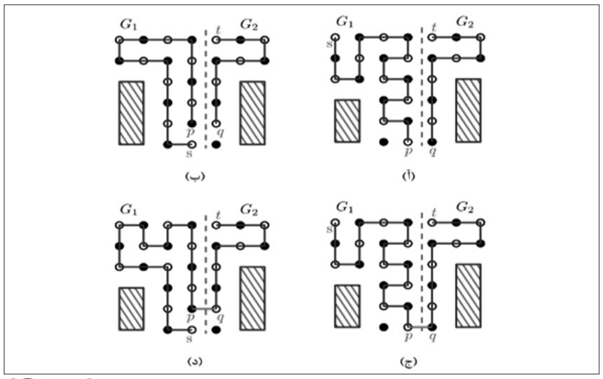
به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

فرض کنید $s = (m_1.n)$ باشد. در این حالت $(G_1.s.p)$ طبق شرط(ش۴) سازگار-رنگی است و طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.p)$ طبق شرط(ش۴) برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1|$.

همچنین طول طولانی‌ترین مسیر در $(G_2.q.t)$ شرط(ش۵) برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2| - 1$.

به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

با استفاده از الگوریتم [۱۳ و ۱۴] طولانی‌ترین مسیر و مسیر همیلتونی را در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ به‌دست می‌آوریم، شکل‌های ۳۰(آ) و ۳۰(ب) را ببینید. در نهایت از طریق دو رأس p و q که در شکل‌های ۳۰(آ) و ۳۰(ب) نشان داده شده است. طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.p)$ را با طولانی‌ترین مسیر در $(G_2.q.t)$ ترکیب می‌کنیم و طولانی‌ترین مسیر را در $(G_T.s.t)$ می‌سازیم، شکل‌های



شکل ۳۰: (آ) و (ب) ساخت طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ و ترکیب دو طولانی‌ترین مسیر با استفاده از اتصال دو رأس مجاور

۳۰(ج) و ۳۰(د) را ببینید. ■

لم ۴-۵. فرض کنید $s_x \le k_1$، $t_x > m - k_2$ و $(G_T.s.t)$ شرط (ح۱۵) را برآورده کنند. آنگاه $\widehat{L}(G_T.s.t) = \widehat{U}(G_T.s.t)$.

اثبات. بنابر لم۳-۷ طول طولانی‌ترین مسیر در G_T بین s و t برابر با $|G_T| - 1$ است. در این حالت یک برش عمودی داریم که گراف توری G_T به دو زیرگراف $G_1 = L(k_1 + 1.n; k_1.l_1)$ و $G_2 = L(m - m_1.n; k_2.l_2)$ تقسیم می‌کند. فرض کنید $p \in G_1$، $q \in G_2$ و $p \sim q$ باشد. به‌طوری که $p = (k_1 + 1.n)$. چون G_T زوج است، پس G_1 و G_2 هردو زوج هستند یا هر دو فرد هستند. فرض کنید G_1 زوج و $color(p) \neq color(s)$ باشد. می‌دانیم $color(q) \neq color(p)$ و $color(t) = color(s)$ است، پس $color(q) = color(t)$. چون G_1 زوج و $color(p) \neq color(s)$ است، در نتیجه $(G_1.s.p)$ سازگار-رنگی است. طبق شرط(ش۴) طول طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1|$ است. چون G_2 زوج و $color(p) = color(t)$ است. طبق شرط(ش۵) طول طولانی‌ترین مسیر در G_2 برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2| - 1$ است. به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

اکنون فرض کنید G_1 زوج و $color(p) = color(s)$ باشد. می‌دانیم $color(q) \neq color(p)$ و $color(t) = color(s)$ است، پس $color(q) \neq color(t)$. چون G_1 زوج و $color(p) = color(s)$ است، طبق شرط(ش۵) طول

طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1| - 1$ است. چون G_2 زوج و $color(q) \neq color(t)$ است، در نتیجه $(G_2.q.t)$ سازگار-رنگی است. طبق شرط(ش۴) طول طولانی‌ترین مسیر در G_2 برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2|$ است.

به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

فرض کنید G_1 فرد و $color(p) \neq color(s)$ باشد. می‌دانیم $color(p) \neq color(q)$ و $color(t) = color(s)$ است، پس $color(q) = color(t)$. چون G_1 فرد و $color(p) \neq color(s)$ است، طبق شرط(ش۵) طول طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1| - 1$ است. چون G_2 فرد و $color(q) = color(t)$ است، در نتیجه $(G_2.q.t)$ سازگار-رنگی است. طبق شرط(ش۴) طول طولانی‌ترین مسیر در G_2 برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2|$ است.

به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

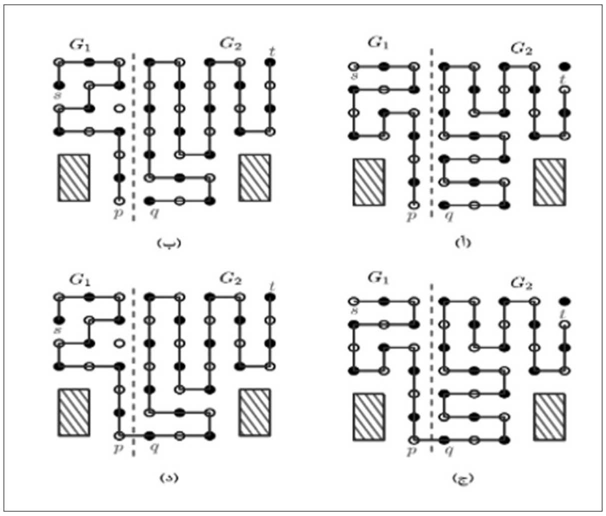
فرض کنید G_1 فرد و $color(p) = color(s)$ باشد. می‌دانیم $color(p) \neq color(p)$ و $color(t) = color(s)$ پس $color(q) \neq color(t)$، چون G_1 فرد و $color(p) = color(s)$ است، در نتیجه $(G_1.s.p)$ سازگار-رنگی است. طبق شرط(ش۴) طول طولانی‌ترین مسیر در G_1 برابر با $\widehat{U}(G_1.s.p) = |G_1|$.

چون G_2 فرد و $color(q) \neq color(t)$ است، طبق شرط(ش۵) طول طولانی‌ترین مسیر در G_2 برابر با $\widehat{U}(G_2.q.t) = |G_2| - 1$.

به وضوح، $\widehat{U}(G_1.s.p) + \widehat{U}(G_2.q.t) = |G_T| - 1$.

با استفاده از الگوریتم [۱۳ و ۱۴] طولانی‌ترین مسیر را در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ به‌دست می‌آوریم، شکل‌های ۳۱(آ) و ۳۱(ب) را ببینید. درنهایت از طریق اتصال دو رأس p و q همان‌طور که در شکل‌های ۳۱(آ) و ۳۱(ب) نشان داده شده است. طولانی‌ترین مسیر را در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ را باهم ترکیب می‌کنیم و طولانی‌ترین مسیر را در $(G_T.s.t)$ می‌سازیم، شکل‌های ۳۱(ج) و ۳۱(د) را ببینید. ■

لم ۴-۶. فرض کنید $(G_T.s.t)$ شرط (ح۱۶) را برآورده



شکل ۳۱: (آ) و (ب) ساخت طولانی‌ترین مسیر در $(G_1.s.p)$ و $(G_2.q.t)$ و (ج) و (د) ترکیب دو طولانی‌ترین مسیر با استفاده از اتصال دو رأس مجاور

کند. آنگاه $\widehat{L}(G_T.s.t) = \widehat{U}(G_T.s.t)$.

اثبات. بنابر لم۳-۸ طول طولانی‌ترین مسیر در G_T بین s و t برابر با $|G_T| - 2$ است. ابتدا فرض کنید $s_x.t_x \le m - k_2$، آنگاه طولانی‌ترین مسیر مانند لم ۴-۴ ساخته می‌شود. حال فرض کنید $s_x \le k_1$ و $t_x > m - k_2$ آنگاه طولانی‌ترین مسیر مانند لم ۴-۵ ساخته می‌شود. ■

قضیه ۴-۱. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با اندازه زوج باشد. فرض کنید $k_1 > 1$، $k_2 > 1$، $l_1 > 1$، $l_2 > 1$ و $l_1 = l_2$ باشد. حالت‌هایی که در لم‌های ۴-۱ تا ۴-۶ گفته شد، کل حالت‌هایی است که برای $(G_T.s.t)$ رخ می‌دهد.

اثبات. حالت‌های زیر را برای اثبات در نظر بگیرید.

حالت ۱. $n - l_1 = 1$ یا $m - k_1 - k_2 = 1$ برقرار باشد. آنگاه $(G_T.s.t)$ در لم ۴-۱ قرار می‌گیرد.

حالت ۲. $n - l_1 \ge 2$ و $m - k_1 - k_2 \ge 2$.

حالت ۱٫۲. $(G_T.s.t)$ یکی از شرایط (ح۷)-(ح۱۳) را برآورده کند. در این حالت طولانی‌ترین مسیر طبق لم ۴-۲ ساخته می‌شود.

حالت ۲٫۲. $(G_T.s.t)$ شرط (ح۱۴) را برآورده کند. در این حالت طولانی‌ترین مسیر طبق لم ۴-۳ ساخته می‌شود.

حالت ۳٫۲. $(G_T.s.t)$ شرط (ح۱۵) را برآورده کند.

حالت ۱٫۳٫۲. $s_x.t_x \le m - k_2$ در این حالت

طولانی‌ترین مسیر طبق لم ٤-٤ ساخته می‌شود.

حالت ۲,۳,۲. $s_x \leq k_1$ و $t_x > m - k_2$. در این حالت طولانی‌ترین مسیر طبق لم ٤-٥ ساخته می‌شود.

حالت ٤,۲. $(G_T.s.t)$ شـرط (ح١٦) را برآورده کند. در این حالت طولانی‌ترین مسیر طبق لم ٤-٦ ساخته می‌شود.■

قضیه ۴-۲. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با اندازه زوج و s و t دو رأس متمایز آن باشند. آنگاه مسئله طولانی‌ترین مسیر بین s و t در زمان خطی حل می‌شود.

اثبات. از آنجایی که برای پیدا کردن طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس معین s و t در گراف توری G_T از الگوریتم‌های پیدا کردن طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های توری مستطیلی و L-شکل استفاده می‌کنیم. بنابراین پیدا کردن طولانی‌ترین مسیر در گراف G_T طبق قضیه‌های ۲-۳ و ۲-٦ در زمان خطی انجام می‌شود. ■

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئلهٔ طولانی‌ترین مسیر را برای رده‌ای از گراف‌ها به نام گراف توری T-شکل در حالتی‌که اندازه گراف زوج باشد، مورد بررسی قرار دادیم. ابتدا حالت‌هایی که برای s و t رخ می‌دهد را بیان کردیم و حد بالای آن را به‌دست آوردیم، سپس نحوه ساخت طولانی‌ترین مسیر بین s و t را از طریق برش‌های عمودی و افقی به‌دست آوردیم. در آینده می‌خواهیم طولانی‌ترین مسیر را برای گراف توری T-شکل در حالتی‌که اندازه گراف فرد است مورد بررسی قرار دهیم.

مراجع

[1] M.R. Garey and D.S. Johnson, “Computers and Intractability”, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif, USA (1979).

[2] M.S. Rahman and M. Kaykobad, “On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths”, Information Processing Letters 94(1) (2005), pp. 37-4.

[3] C. Umans and W. Lenhart, “Hamiltonian cycles in solid grid graphs”, in Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE (1997), pp. 496-505.

[4] F. Luccio and C. Mugnia, “Hamiltonian paths on a rectangular chessboard”, in Proceedings of the 16th Annual Allerton Conference (1978), 161–173.

[5] A. Itai, C.H. Papadimitriou, and J.L. Szwarcfiter, “Hamilton paths in grid graphs”, SIAM Journal on Computing 11(4) (1982), 676–686.

[6] S.D. Chen, H. Shen and R. Topor, “An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshes”, Parallel Computing 28 (2002), pp.1293-1305.

[7] T.W. Chang, O. Navrátil, S.L. Peng, “The end-to-end longest path problem on a mesh with a missing vertex”, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications (2015), pp. 59-66.

[8] M. Hydara, S. Gannes, N. Traore, and W.E. Kevin Yanogo, “A study of end-to-end Longest Path Problem with two missing vertices”, National Dong Hwa University CSIE Department (2017).

[9] K. Ioannidou, G.B. Mertzios, and S.D. Nikolopoulos, “the longest path problem is polynomial on interval graphs”, International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science MFCS (2009).

[۱۰] فاطمه کشاورز کوهجردی و علیرضا باقری، مسیرهای همیلتونی در گراف‌های توری الفبایی T، پانزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران، ۱۳۹۱.

[۱۱] ریحانه فرقانی تهرانی، مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین در گراف‌های توری T-شکل با اندازه زوج، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشگاه شاهد، ۱۴۰۱.

[۱۲] ریحانه فرقانی تهرانی و فاطمه کشاورز کوهجردی، پیدا کردن مسیر همیلتونی بین دو رأس معین در گراف‌های توری T-شکل با اندازه زوج، مجله علمی پژوهشی رایانش امن و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ۱۴۰۱، ۱۲-۱.

[13] F. Keshavarz-Kohjerdi, A. Bagheri, and A. Asgharian-Sardroud, “A linear-time algorithm for the longest path problem in rectangular grid graphs”, Journal of Applied Mathematics, 160(3) (2012), pp. 210-217.

[14] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri,“Longest (s,t)-paths in L-shaped grid graphs”, Optimization Methods and Software (2018), pp.797 -826 .

[15] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, “Hamiltonian paths in L-shaped grid graphs.” Theoretical Computer Science 621 (2016), pp.37-56.

[16] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, “Hamiltonian paths in some classes of grid graphs”, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012).

[17] A. Asgharian-Sardroud and A. Bagheri, “An approximation algorithm for the longest path problem in solid grid graphs”. Optim Methods Softw (2016), pp. 479-493.

[18] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, “A linear-time algorithm for finding Hamiltonian (s, t)-paths in even-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole”, Theoretical Computer Science 690 (2017), pp. 26-58.

[19] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, “ Linear-time algorithms for finding Hamiltonian and longest (s, t)-paths in C-shaped grid graphs”, Discrete Optimization, article 100554, 2020.

[20] F. Keshavarz-Kohjerdi, Off-line exploration of rectangular cellular environments with a rectangular obstacle, Optimization Methods and Software (2022), pp. 1805-1819.

[۲۰] مجتبی غریب بلوکی و فاطمه کشاورز کوهجردی، الگوریتم زمان خطی برای پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L-شکل با اندازه فرد، مجله علوم رایانشی، ۱۴۰۱، ۲۹-۳۹.