

مقایسه الگوریتم‌های عددی اولیه-دوگان و اسپلیت برگمن در پردازش تصویر

محمد باقر اسدی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران
پست الکترونیکی: mb.asadi@ut.ac.ir

علیرضا حسینی*

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران
پست الکترونیکی: hosseini.alireza@ut.ac.ir

چکیده

در این مقاله به مقایسه دو الگوریتم متداول در حل مسائل پردازش تصویر، الگوریتم اولیه-دوگان و الگوریتم اسپلیت برگمن می‌پردازیم. ابتدا تحلیل ریاضی الگوریتم اسپلیت برگمن بیان می‌شود و برای مدل‌های وردشی TV و TGV الگوریتم‌های محاسباتی ارائه می‌شود و در پایان این الگوریتم با الگوریتم اولیه-دوگان از لحاظ کمی و کیفی مقایسه می‌شود.

مقدمه

روش‌های وردشی نقش مهمی در بسیاری از علوم از جمله مکانیک کوانتومی، مهندسی، آمار و اقتصاد دارند. اساس روش تغییراتی اصل تغییرات است که در حساب تغییرات استفاده می‌شود. آن‌ها اغلب به صورت انتگرال‌های مربوط به توابع و مشتقات آن‌ها بیان می‌شوند و در نتیجه روش‌های تغییراتی شامل حل معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. در زمینه پردازش تصویر یک تابع معمولاً شامل یک بخش داده و یک بخش منظم‌ساز است. مورد اول شباهت بین تصویر بازسازی شده و تصویر اصلی را مجاز می‌داند

در حالی که دومی نوعی صافی یا همواری را به تصویر بازسازی شده شامل مشتق اول یا دوم تحمیل می‌کند. در دو دهه اخیر، مدل‌های متنوعی برای پردازش تصویر استفاده شده است [۵-۸] که ما در این مقاله فقط دو نوع از مدل‌های متنوع را تحت بررسی قرار می‌دهیم. یکی از محبوب‌ترین مدل‌های متنوع برای پردازش تصویر، مدل تغییرات کلی (TV) است که توسط رودین، اوشر و فاطمی پیشنهاد شده است [۹]. انرژی عملکردی مدل به شرح زیر است:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|, \quad (1)$$

که $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$: f یک تصویر نوفه‌ای تعریف شده روی فضای مستطیلی و پارامتر α اعمال شده در TV سطح همواری تصویر صاف را کنترل میکند.

مدل مرتبه اول TV در حفظ لبه‌های تصویر در حین حذف نوفه موثر است. ویژگی مطلوب الگوریتم‌های نوفه‌زدایی تصویر، بازیابی تصویر بدون از دست‌دادن ویژگی‌های مهم است. با این حال، این مدل اثرات جانبی نامطلوب زیادی دارد که یکی از آن‌ها اثر پلکانی است، یعنی تصویر بازسازی شده دندان‌دار است. مدل‌های تغییرات

مرتبه بالا برای حذف اثر پلکانی پیشنهاد شده‌اند.

در این مقاله فقط پیاده‌سازی یکی از مدل‌های تغییرات مرتبه بالا برای پردازش تصویر ارائه شده است.

اخیرا مدل کلی تغییرات تعمیم‌یافته TGV برای پردازش تصویر ارائه شده است [۱۰]. ویژگی اصلی این روش این است که می‌تواند با ویژگی‌های تصاویر مختلف (ثابت تکه‌ای، تکه‌ای، تکه‌ای خطی) سروکار داشته باشد.

این مدل به صورت زیر است:

$$E(u, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u - p| + \beta \int_{\Omega} |\varepsilon(p)|, \quad (2)$$

که $\varepsilon(p)$ مشتق متقارن است و به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} \partial_x p_1 & \frac{\partial_y p_1 + \partial_x p_2}{2} \\ \frac{\partial_y p_1 + \partial_x p_2}{2} & \partial_y p_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

مینیمم (۲) روی همه گرادیان‌های میدان تغییر شکلی

$p = (p_1, p_2)$ در فضای تصویر Ω گرفته می‌شود.

۲- مروری بر مدل‌های وردشی

به منظور حل مدل‌های تغییراتی قبلی با استفاده از روش کارآمد جداساز برگمن [۱۱، ۱۲، ۱۳]، تفکیک عملگرهای مشتق اول و دوم و چهارم مورد نیاز است.

گرادیان و مشتق متقارن به ترتیب به صورت زیر

هستند:

$$\nabla u = (\partial_x^+ u, \partial_y^+ u), \quad (4)$$

$$\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} \partial_x^+ p_1 & \frac{\partial_y^- p_1 + \partial_x^- p_2}{2} \\ \frac{\partial_y^- p_1 + \partial_x^- p_2}{2} & \partial_y^- p_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

از نظر تئوری باید در ماتریس هسین $\partial_y \partial_x$ با $\partial_x \partial_y$ برابر باشد. بنابراین لازم است که فرم گسسته آن را تعریف کنیم. مسئله شرایط مرزی نیز مورد نیاز است زیرا در بهینه‌سازی عددی بسیار مهم است. برخلاف شرایط مرزی نیومن، ما شرایط مرزی دوره‌ای را اعمال می‌کنیم [۱۴، ۱۵].

با انتخاب چنین شرایطی، FFT می‌تواند برای بهبود سرعت محاسبات استفاده شود. ابتدا طرح‌های تفاضلات پیشرو و پسرو ارائه می‌شوند. فرض کنید $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N}$

نشان‌دهنده فضای تصویر خاکستری دو بعدی با اندازه MN است. مختصات x و y به ترتیب در امتداد ستون‌ها و سطرها هستند.

بنابراین اولین تفاضلات پیشرو u در نقطه (i, j) در امتداد x و y به ترتیب به صورت زیر است:

(۶)

$$\partial_x^+ u_{ij} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, \\ u_{i,1} - u_{i,j}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, j = N. \end{cases} \quad (7)$$

$$\partial_y^+ u_{ij} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, \\ u_{1,j} - u_{i,j}, & \text{if } i = M, 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

و اولین تفاضلات پسرو نیز به صورت زیرند:

(۸)

$$\partial_x^- u_{ij} = \begin{cases} u_{i,j} - u_{i,j-1}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, 1 < j \leq N, \\ u_{i,j} - u_{i,N}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, j = 1. \end{cases} \quad (9)$$

$$\partial_y^- u_{ij} = \begin{cases} u_{i,j} - u_{i-1,j}, & \text{if } 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, \\ u_{i,j} - u_{M,j}, & \text{if } i = 1, 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

$u \in \mathbb{R}^{M \times N}$ و $p = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^{M \times N})^2$ نسخه گسسته

عملگر واگرایی الحاقی مرتبه اول را برآورده می‌کند.

$$\sum_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N} -\text{div}(p) \cdot u = \sum_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N} p \cdot \nabla u$$

بنابراین با توجه به تعریف عملگر گرادیان گسسته،

بررسی واگرایی گسسته (دیورژانس) به صورت زیر است:

$$\text{div}(p_{ij}) = \partial_x^- p_{1ij} + \partial_y^- p_{2ij}.$$

۳- الگوریتم عددی سریع بر پایه روش اسپلیت برگمن

۳-۱ الگوریتم اسپلیت برگمن برای روش تغییراتی TV

ابتدا یک متغیر برداری تجزیه کمکی $w = (w_1, w_2)$ و یک پارامتر تکراری برگمن $b = (b_1, b_2)$ و یک پارامتر جریمه مثبت θ تعریف می‌کنیم که تابع (۱) را به صورت زیر تبدیل می‌کند.

$$E(u, w; b) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha \int_{\Omega} |w| + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u - b)^2. \quad (10)$$

در این تحقیق برای پیدا کردن مینیمم تابع (۱) از یک روش بهینه‌سازی متناوب برای یافتن نقاط زینی استفاده شده است. برای انجام این کار ابتدا متغیر w را ثابت در

نظر می‌گیریم و معادله اولیر را با توجه به u بازنویسی می‌کنیم:

$$u - \theta \operatorname{div}(\nabla u) = f - \theta \operatorname{div}(w - b). \quad (11)$$

با توجه به تعریف گرادیان گسسته (ξ) ، دیورژانس و لاپلاس در بخش دوم، صورت گسسته (11) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$u_{ij} - \theta(\partial_x^- \partial_x^+ u_{ij} + \partial_y^- \partial_y^+ u_{ij}) = G_{ij}, \quad (12)$$

که

$$G_{ij} = f_{ij} - \theta(\partial_x^-(w_{1ij} - b_{1ij}) + \partial_y^-(w_{2ij} - b_{2ij})).$$

از آنجایی که شرایط مرزی دوره‌ای بر روی مشتقات گسسته در بخش (2) اعمال شده است، تبدیل فوریه گسسته می‌تواند به طور مستقیم برای هر دو طرف معادله (12) صورت گیرد:

$$F(u_{ij} - \theta(\partial_x^- \partial_x^+ u_{ij} + \partial_y^- \partial_y^+ u_{ij})) = F(G_{ij}),$$

که F تبدیل فوریه گسسته است. برای فرکانس‌های گسسته r و s داریم:

$$(1 - 2\theta(\cos \frac{2\pi s}{N}))F(u_{ij}) = F(G_{ij}). \quad (13)$$

$i \in [1, M]$ و $j \in [1, N]$ شاخص‌هایی در دامنه زمان گسسته هستند و $r \in [0, M]$ و $s \in [0, N]$ فرکانس‌هایی در دامنه فرکانس گسسته هستند.

معادله (13) برای ما یک راه حل بسته به صورت زیر فراهم می‌کند

$$u_{ij} = R \left(F^{-1} \left(\frac{F(G_{ij})}{\xi} \right) \right), \quad (14)$$

که F^{-1} تبدیل فوریه گسسته است. R قسمت حقیقی عدد مختلط است. با ثابت فرض کردن متغیر u برای بردار w ، می‌توانیم معادله اولیر را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\alpha \frac{w}{|w|} + \theta(w - \nabla u - b) = 0,$$

که می‌توان آن را به صورت هوشمندانه و با پیروی از معادله مشترک آستانه‌گذاری نرم تعمیم داد:

$$w_{ij} = \max \left(|\nabla u_{ij} + b_{ij}| - \frac{\alpha}{\theta}, 0 \right) \frac{\nabla u_{ij} + b_{ij}}{|\nabla u_{ij} + b_{ij}|}. \quad (15)$$

الگوریتم اسپلیت برگمن برای مسئله TV به صورت زیر است:

الگوریتم اسپلیت برگمن برای حل مدل (10)

پارامترهای پراکسیمال w, u, b

N ، تعداد تکرارها تا زمانی که به u همگرا شود و جواب اولیه $0 < (\alpha, \theta) < 0$ ، $(w; b) = 0$ ، را انتخاب کنید برای هر $n \geq 0$ مادامی که $n < N$ تکرار کن

$$u_{ij} = R \left(F^{-1} \left(\frac{F(G_{ij})}{\xi} \right) \right),$$

$$w_{i,j} = \max \left(|\nabla u_{i,j} + b_{i,j}| - \frac{\alpha}{\theta}, 0 \right) \frac{\nabla u_{i,j} + b_{i,j}}{|\nabla u_{i,j} + b_{i,j}|},$$

$$b \leftarrow b + \nabla u - w.$$

۳-۲ الگوریتم اسپلیت برگمن برای مدل تغییرات تعمیم یافته کلی TGV

به منظور حل مدل TGV با استفاده از روش اسپلیت برگمن، ما متغیرهای کمکی (w, v, b, d) و پارامترهای تجزیه مثبت (θ_1, θ_2) را تعریف می‌کنیم که تبدیل آن به شکل زیر است:

$$E(u, p, w, v; b, d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha \int_{\Omega} |w| + \frac{\theta_1}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u + p - b)^2 + \beta \int_{\Omega} |v| + \frac{\theta_2}{2} \int_{\Omega} (v - \varepsilon(p) - d)^2. \quad (16)$$

معنی متغیرهای اولیه و دوگان در 16 به صورت زیر است:

- u نشان‌دهنده تصویر بدون نویزی که باید پیدا کنیم.
- $p = (p_1 p_2)$ نشان‌دهنده گرادیان متقارن از میدان تغییر شکل است.

$w = (w_1 w_2)$ تابع ارزش برداری دو بعدی مربوط به میدان برداری $p - \nabla u$ است.

$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_3 \\ v_3 & v_{22} \end{pmatrix}$ تابع ارزش برداری چهار بعدی مربوط به مشتق متقارن $\varepsilon(p)$ است.

$b = (b_1 b_2)$ نشان‌دهنده پارامتر تکراری برگمن برای اجرای $w = \nabla u - p$ است.

$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_3 \\ d_3 & d_{22} \end{pmatrix}$ نشان‌دهنده پارامتر تکراری برگمن برای اجرای $v = \varepsilon(p)$ است.

با استفاده از روش بهینه‌سازی متناوب، ابتدا متغیرهای

$(\theta_1, \theta_2) < 0$ ، مثبت است. بعد از این که سیستم‌های معادلات خطی برای هر فرکانس r و s روی حوزه فرکانس گسسته حل شوند، از تبدیل فوریه وارون گسسته برای به دست آوردن فرم‌های تحلیلی داده شده p_1 و p_2 استفاده می‌کنیم.

$$p_{1i,j} = R \left(F^{-1} \left(\frac{a_{22}F(h_{1i,j}) - a_{12}F(h_{2i,j})}{D} \right) \right), \quad (21)$$

$$p_{2i,j} = R \left(F^{-1} \left(\frac{a_{11}F(h_{2i,j}) - a_{21}F(h_{1i,j})}{D} \right) \right). \quad (22)$$

متغیرهای $(u, w, v; b, d)$ را برای بردار 2 بعدی w ، ثابت در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$$\alpha \frac{w}{|w|} + \theta_1 (w - \nabla u + p - b) = 0$$

که می‌تواند به صورت زیر حل شود:

$$w_{i,j} = \max(|\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}| - \frac{\alpha}{\theta_1}, 0) \frac{\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}}{|\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}|} \quad (23)$$

پس از حل w ، معادله اوایلر مربوط به v به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\beta \frac{v}{|v|} + \theta_2 (v - \varepsilon(p) - d) = 0.$$

که می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود (فرض کنید $\frac{0}{0} = 0$):

$$v_{i,j} = \max(|\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}| - \frac{\beta}{\theta_2}, 0) \frac{\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}}{|\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}|}. \quad (24)$$

سرانجام الگوریتم مربوط به آن به صورت زیر است:

الگوریتم اسپلیت برگمن برای حل مدل (۱۶)

پارامترهای پراکسیمال: w, u, b, p, d

N ، تعداد تکرارها تا زمانی که به همگرا شود

و جواب اولیه $(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2) > 0$ ، $(p, w, v; b, d) = 0$.

را انتخاب کنید

و برای هر $n \geq 0$ ، مادامی که $n < N$ تکرار کن

$$u_{i,j} = R \left(F^{-1} \left(\frac{F(G_{ij})}{\xi_1} \right) \right),$$

$$p_{1i,j} = R \left(F^{-1} \left(\frac{a_{22}F(h_{1i,j}) - a_{12}F(h_{2i,j})}{D} \right) \right),$$

$$p_{2i,j} = R \left(F^{-1} \left(\frac{a_{11}F(h_{2i,j}) - a_{21}F(h_{1i,j})}{D} \right) \right),$$

$$w_{i,j} = \max(|\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}| - \frac{\alpha}{\theta_1}, 0) \frac{\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}}{|\nabla u_{i,j} - p_{i,j} + b_{i,j}|}$$

$(p, w, v; b, d)$ را برای به دست آوردن معادله اوایلر با توجه به u ثابت در نظر می‌گیریم:

$$u - \theta_1 \operatorname{div}(\nabla u) = f - \theta_1 \operatorname{div}(w + p - b). \quad (17)$$

راه حل بسته این PDE خطی به صورت زیر ارائه

می‌شود:

$$u_{i,j} = R(F^{-1}(\frac{F(G_{ij})}{\xi_1})) \quad (18)$$

که G عبارت سمت راست (۱۷) و ξ_1 از پیش تعریف شده

است. متغیرهای $(u, w, v; b, d)$ را ثابت در نظر می‌گیریم.

برای هر p_1 و p_2 فرمول مجزا به صورت زیر داریم:

$$(19)$$

$$(\theta_1 - \theta_2 \partial_x^+ \partial_x^- - \frac{\theta_2}{2} \partial_y^+ \partial_y^-) p_{1i,j} - \frac{\theta_2}{2} \partial_y^+ \partial_x^- p_{2i,j} = h_{1i,j},$$

$$(20)$$

$$(\theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \partial_x^+ \partial_x^- - \theta_2 \partial_y^+ \partial_y^-) p_{2i,j} - \frac{\theta_2}{2} \partial_x^+ \partial_y^- p_{1i,j} = h_{2i,j}.$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی (۱۹) و (۲۰) در بخش

۲ تعریف شده اند.

$$h_1 = \theta_1 (\partial_x^+ u + b_1 - w_1)$$

$$\theta_2 \partial_x^+ (v_{11} - d_{11}) - \theta_2 \partial_y^+ (v_3 - d_3),$$

$$h_2 = \theta_1 (\partial_y^+ u + b_2 - w_2) - \theta_2 \partial_y^+ (v_{22} - d_{22})$$

$$- \theta_2 \partial_x^+ (v_3 - d_3).$$

با اعمال کردن تبدیل فوریه گسسته به دو طرف (۱۹) و

(۲۰) سیستم معادلات خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(p_{1i,j}) \\ F(p_{2i,j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(h_{1i,j}) \\ F(h_{2i,j}) \end{pmatrix},$$

که در آن ضرایب به صورت زیر هستند:

$$a_{11} = \theta_1 - \theta_2 \left(2 \cos \frac{2\pi s}{N} - 2 \right) - \frac{\theta_2}{2} \left(2 \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right),$$

$$a_{12} = -\frac{\theta_2}{2} \left(-1 + 2 \cos \frac{2\pi r}{M} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi r}{M} \right)$$

$$\left(1 - \cos \frac{2\pi s}{N} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi s}{N} \right),$$

$$a_{21} = -\frac{\theta_2}{2} \left(-1 + \cos \frac{2\pi s}{N} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi s}{N} \right)$$

$$\left(1 - \cos \frac{2\pi r}{M} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi r}{M} \right),$$

$$a_{22} = \theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \left(2 \cos \frac{2\pi s}{N} - 2 \right) - \theta_2 \left(2 \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right).$$

دترمینان ماتریس ضرایب $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ برابر است با:

$$D = \left(\theta_1 - 2\theta_2 \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right) \right)$$

$$\left(\theta_1 - \theta_2 \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right) \right),$$

که همیشه برای همه فرکانس‌های گسسته، با فرض

$$v_{i,j} = \max \left(|\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}| - \frac{\beta}{\theta_2} \cdot 0, \frac{\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}}{|\varepsilon(p_{i,j}) + d_{i,j}|} \right)$$

$$b \leftarrow b + \nabla u - w,$$

$$d \leftarrow d + \varepsilon(p) - v.$$

انسان هماهنگ نیستند. از آنجایی که ما تصویر اصلی (512 × 512) را به عنوان تصویری با کیفیت عالی در نظر می‌گیریم، $SSIM(X, Y)$ می‌تواند به عنوان یک معیار کمی برای ارزیابی تصاویر بزرگنمایی شده تلقی شود که در آن X و Y دو تصویر می‌باشند.

$$\mu_x = \sum_{i=1}^N W_i \cdot X_i,$$

$$\sigma_x = \left(\sum_{i=1}^N W_i (X_i - \mu_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^N W_i (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y),$$

$$SSIM(X, Y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}.$$

در این مقاله ما از دو معیار $PSNR$ ، $SSIM$ برای مقایسه تصاویر استفاده می‌کنیم.

۵- حل مسئله کاهش نوفه با استفاده از الگوریتم‌های اسپلیت برگمن و اولیه-دوگان

در این بخش مسئله کاهش نوفه تصویر را با منظم‌سازهای TV و TGV الگوریتم اسپلیت برگمن و الگوریتم‌های اولیه دوگان چمبول-پوک استفاده می‌کنیم. در این شبیه‌سازی ابتدا تصویر نوفه‌ای جمعی با نوفه گاوسی و انحراف معیار 0/2 را از تصویر اصلی ایجاد می‌کنیم و سپس سعی می‌کنیم که نوفه را کاهش دهیم. نتایج عددی نشان می‌دهند که الگوریتم اسپلیت برگمن نتایج به مراتب قابل اتکاءتری نسبت به الگوریتم چمبول-پوک به دست می‌دهد. به عبارتی الگوریتم اسپلیت برگمن سرعت همگرایی به مراتب بالاتری نسبت به الگوریتم چمبول-پوک دارد و نتایج دقیق‌تری از حیث دو معیار $PSNR$ و $SSIM$ به دست می‌دهد.

در ادامه به کمک نمودارها و تصاویر ارائه شده، به مقایسه کیفی دو الگوریتم فوق برای حل کاهش نوفه تصویر با دو منظم‌ساز TV و TGV می‌پردازیم. در شکل‌های ۱ و ۲، مسئله کاهش نوفه تصویر استاندارد cameraman.jpg مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۱ مقایسه‌ای کمی با معیارهای $PSNR$ و $SSIM$ انجام گرفته است. نمودار $PSNR$ نسبت به تعداد تکرارها و همچنین $SSIM$ نسبت به

۴- معیارهای سنجش کیفیت در مقایسه تصاویر

ارزیابی میزان این تغییرات کیفیت در تصویر توسط دو روش کلی مقایسه توسط انسان و به طریق محاسباتی انجام می‌پذیرد. در روش‌های ذهنی مقایسه براساس سیستم بینایی انسان است. روش‌های ارزیابی کمی، از یک معیار از پیش تعریف شده برای مقایسه استفاده می‌کند که براساس نوع معیار به دو دسته اصلی متکی بر تصویر مرجع و مستقل از آن تقسیم می‌شود.

معیارهای متکی بر مرجع شامل $(SSIM)$ ، $(PSNR)$ ، (CC) ، $(RMSE)$ ، $(RASE)$ ، (SAM) و ... می‌باشند. از معیارهای غیرمتکی به مرجع که اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته، شاخص‌های S_3 و کیفیت (BIQ) را می‌توان معرفی نمود.

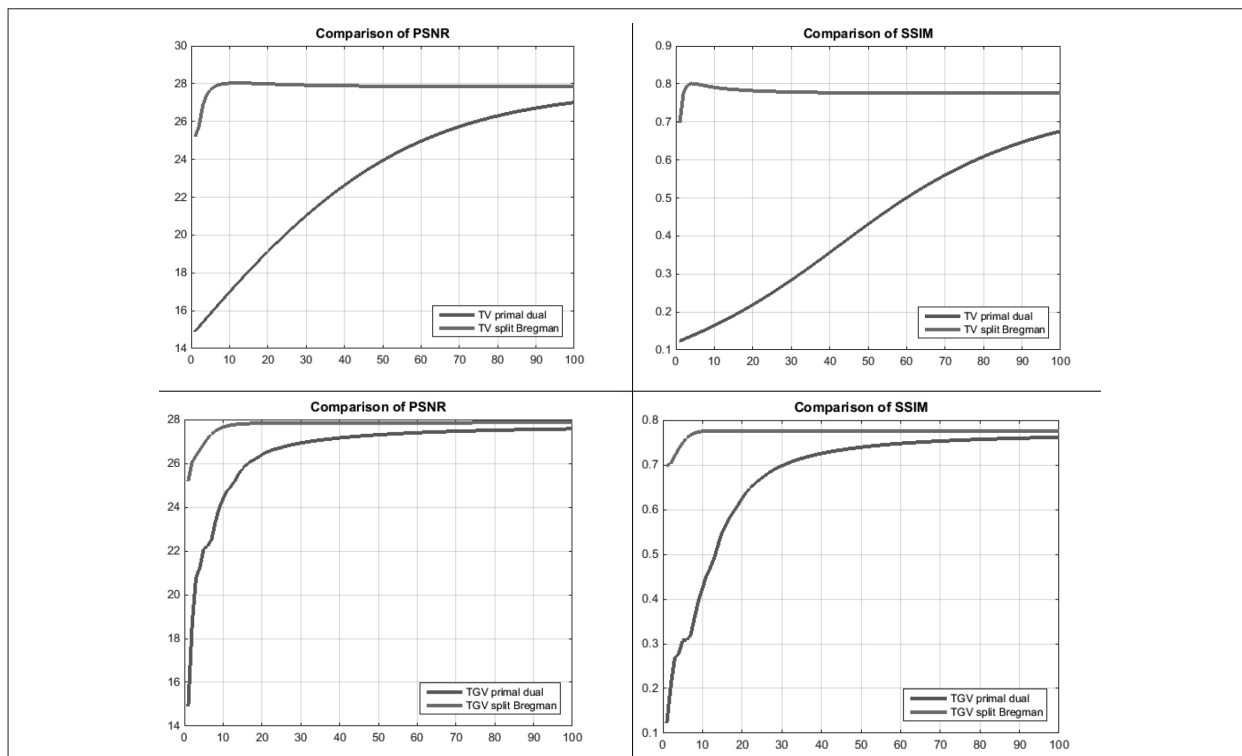
$PSNR$ متداول‌ترین روش برای اندازه‌گیری کیفیت تصویر است که در آن MAX بیشترین مقدار پیکسل موجود در تصویر است، هر چه میزان $PSNR$ بیشتر باشد نشان‌دهنده این است که بازسازی تصویر بهتر صورت گرفته است.

$$PSNR = 10 \cdot \log \frac{MAX^2}{MSE},$$

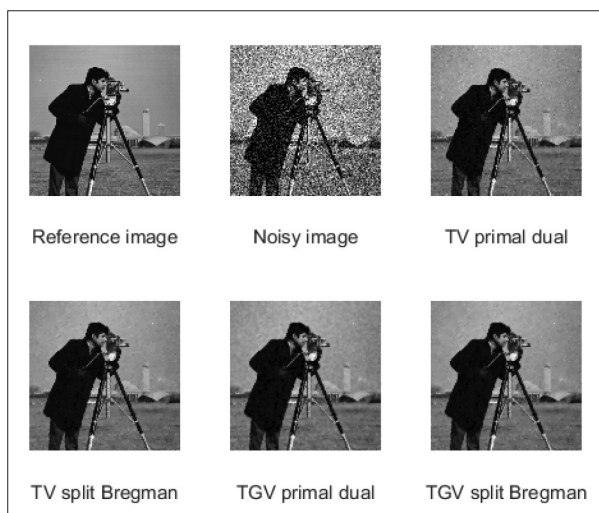
$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (f(i,j) - H(i,j))^2.$$

که f, H سطر و ستون تصویر را نشان می‌دهند و H به ترتیب تصویر تفکیک‌پذیری بالای اصلی و تصویر بازسازی شده است. ساده‌ترین معیار ارزیابی که به طور گسترده نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، میانگین مربع خطا (MSE) است. این معیار به این دلیل که از نظر محاسباتی ساده بوده، دارای معنای فیزیکی واضح هستند و از نظر ریاضی در زمینه بهینه‌سازی مناسبند، دارای جذابیت هستند.

اما این معیارها با کیفیت درک شده توسط چشم



شکل ۱: مقایسه الگوریتم‌های اولیه-دوگان و اسپلیت برگمن برای حل مسئله کاهش نوفه cameraman.jpg با استفاده از منظم‌سازهای TV و TGV و نمودارهای PSNR و SSIM: همان‌طور که مشاهده می‌شود سرعت همگرایی به جواب در روش اسپلیت برگمن بیشتر است.



شکل ۲: مقایسه کیفی الگوریتم‌های اولیه-دوگان و اسپلیت برگمن برای حل مسئله کاهش نوفه با استفاده از منظم‌سازهای TV و TGV: کیفیت تصاویر به‌دست آمده از طریق الگوریتم اسپلیت برگمن از لحاظ کاهش نوفه به مراتب از الگوریتم اولیه و دوگان بهتر است.

تعداد تکرارها رسم شده است. برای منظم‌ساز TV روش اسپلیت برگمن پس از حدود ۱۰ تکرار به همگرایی می‌رسد در صورتی که روش اولیه دوگان حتی پس از ۱۰۰ تکرار نیز به همگرایی نمی‌رسد. تحلیل مشابهی را می‌توان برای منظم‌ساز TGV انجام داد.

در شکل ۲، مقایسه‌ای کیفی از دو روش عددی را ملاحظه می‌کنید: نتایج حاصل از کاهش نوفه برای تصویر cameraman.jpg پس از ۱۰۰ تکرار از هر یک از الگوریتم‌ها در تصویر نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش اسپلیت برگمن با هر دو منظم‌ساز TV و TGV کاهش نوفه‌ای به مراتب بهتر را نتیجه می‌دهد. این آزمایش برای ده‌ها مسئله مشابه انجام شده است و نتایجی مشابه حاصل شده است.

259–268.

[3] Osher S., Burger M., Goldfarb D., Xu J. and Yin W., An iterative regularization method for total variation-based image restoration. MMS, 4:460–489, 2005.

[4] He i., Chang T.-C. and Osher S., Mr image reconstruction from sparse radial samples by using iterative refinement procedures. Proceedings of the 13th annual meeting of ISMRM, page 696, 2006.

مراجع

- [1] Meyer Y., Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations, AMS, Providence, RI, 2001.
 [2] Rudin L., Osher S. and Fatemi E., Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Phys. D.,60 (1992), pp.

- [5] Chan T., Shen JH. Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods. SIAM: Philadelphia, USA, 2005.
- [6] Aubert G., Kornprobst P., Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer Science and Business Media: New York, USA, 2006, 147. 3.
- [7] Paragios N., Chen Y., Faugeras O., Handbook of Mathematical Models in Computer Vision. Springer Science and Business Media: New York, USA, 2006. 4.
- [8] Scherzer O., Handbook of Mathematical Methods in Imaging. Springer Science and Business Media: New York, USA, 2011.
- [9] Rudin L., Osher S., Fatemi E., Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 1992; 60(1):259–268.
- [10] Bledies K., Kunisch K., Pock T., Total generalized variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2010; 3(3):492–526.
- [15] Goldstein T., Osher S., The split bregman method for l_1 -regularized problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2009; 2(2):323–343.
- [13] Duan J., Tench C., Gottlob I., Proudlock F., Bai L., New variational image decomposition model for simultaneously denoising and segmenting optical coherence tomography images. *Physics in Medicine and Biology* 2015; 60(22):8901–8922.
- [13] Duan J., Ding Y., Pan Z., Yang J., Bai L., Second order Mumford-Shah model for image denoising. 2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), Quebec, Canada, 2015, 547–551.
- [15] Getreuer P., Rudin-Osher-Fatemi total variation denoising using split Bregman. *Image Processing On Line* 2012; 2:74–95.
- [15] Getreuer P., Total variation deconvolution using split Bregman. *Image Processing On Line* 2010; 2(1):158–174.