

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

نوع مقاله: پژوهشی

## سازوکاری برای بهبود همگامی در شبکه‌های کوراموتو از طریق باز آرای پیوندها\*

سمیرا حسین قربان\*\*

پژوهشکده علوم کامپیوتر، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران  
پست الکترونیکی: s.hosseinghorban@ipm.ir

بردیا حسام

پژوهشکده علوم کامپیوتر، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران  
پست الکترونیکی: bardyaa@ipm.ir

حمید سربازی آزاد

دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف، پژوهشکده علوم کامپیوتر، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران  
پست الکترونیکی: azad@ipm.ir, azad@sharif.edu

### چکیده

همگامی، پدیده فیزیکی شگفت‌انگیزی است که میان مجموعه‌ای از گره‌های شبکه که دینامیک فردی دارند رخ می‌دهد. از آنجا که این پدیده در بسیاری از سامانه‌های مختلف از زیست‌شناسی گرفته تا مهندسی و حتی رفتار جمعی انسان مشاهده می‌شود، توجه زیادی را از وجوه مختلف به خود جلب کرده است. دینامیک این شبکه‌ها اغلب با مدل کوراموتو صورت‌بندی می‌شود که در عین سادگی، کارآمدی قابل قبولی دارد.

پژوهش‌های بسیاری درباره نقش عوامل مختلف (از جمله ساختار شبکه، قدرت جفت‌شدگی و بسامدهای ذاتی نوسانگرهای روی هر گره) بر میزان همگامی گره‌ها و نیز مهندسی هرکدام از عامل‌ها به منظور افزایش (یا کاهش) همگامی در شبکه انجام شده است. یکی از روش‌های تغییر ساختار شبکه به «سیم‌کشی مجدد» معروف است.

\* این مقاله گسترشی است از مقاله ارائه شده در سومین کنفرانس ملی انفورماتیک ایران [۱].  
\*\* نویسنده مسئول

1-Rewiring

این روش نوعی باز آرای پیوندهای شبکه است و در آن با سازوکارهای مختلف، برخی از پیوندهای شبکه قطع می‌شوند و برخی از گره‌هایی که قبلاً پیوندی نداشتند متصل می‌شوند. ما در پژوهش حاضر سازوکاری برای بهبود همگامی در شبکه‌های کوراموتو با نوسانگرهای غیرهمگون ارائه می‌کنیم که در آن هر تصمیم درباره حذف یا افزودن پیوندها براساس ویژگی‌های محلی و نیز سرتاسری شبکه اتخاذ می‌شود، و بر پایه شواهد عددی نشان می‌دهیم که این روش به‌ازای مقدارهای کم قدرت جفت‌شدگی نتیجه‌های بهتری از روش‌های پیشین به‌دست می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** مدل کوراموتو، همگامی، باز آرای، پارامتر نظم.

### مقدمه

مطالعه رفتارهای دینامیکی و ظهور همگامی<sup>۲</sup> در

2-Synchronization

مجموعه بزرگی از نوسانگرها که در شبکه‌ای با یکدیگر جفت<sup>۲</sup> شده‌اند از موضوعات چالش‌برانگیز تحقیقات بین رشته‌ای است. از جمله مصادیق همگامی در شبکه‌های دینامیکی می‌توان به ریتم‌دار شدن کف‌زدن‌های نامنسجم یک جمعیت، همزمان شدن آواز جیرجیرک‌ها، حرکت همگام مترونوم‌هایی که در کنار هم قرار می‌گیرند، همزمان شدن چشمک زدن چند کرم شب‌تاب در تاریکی، همگامی خودبه‌خودی شاخه‌های بی‌شماری از شبکه انتقال جریان متناوب برق، کارکرد نورون‌های مغز ما با الگوهای همزمان، و همگامی سلول‌های ضربان‌ساز در قلب اشاره کرد. مصداق‌ها و نیز جزئیات بیشتر را می‌توان در منابع مختلف (از جمله در [۶، ۸، ۱۰، ۲۴، ۲۵، ۲۸، ۳۳، ۳۶]) یافت. شاید با کمی اغراق بتوان گفت که اساساً طبیعت به نوعی بر پایه همگامی بنا شده است.

کشف این پدیده را به فیزیکدان و مخترع هلندی، کریستیان هویخنس در ۱۶۶۵ نسبت می‌دهند [۳۱] که با مشاهده یک جفت ساعت آونگی اختراع خودش که کنار هم به دیوار آویزان شده بودند متوجه شد که آونگ‌ها دقیقاً هماهنگ نوسان می‌کنند. او با تغییر بسامدهای اولیه آونگ‌ها همگامی موجود را به هم زد؛ ولی بعد از مدتی آن‌ها مجدداً هماهنگ شدند. در مقابل، وقتی ساعت‌ها را از هم دور و به دو تکیه‌گاه مجزا آویزان کرد، از هماهنگی قبلی خارج شدند. هویخنس در نهایت استنباط کرد که «همگامی» ساعت‌ها، به قول او، ناشی از ضربه‌هایی است که نوسان هریک از آن‌ها از طریق دیوار به دیگری وارد می‌کند.

تاکنون پژوهش‌های گسترده‌ای با هدف کشف قوانینی برای زمان وقوع الگوهای مختلف همگامی، چرایی آن‌ها، یادگیری و نحوه پیش‌بینی و نیز کنترل آن‌ها در بسیاری از زمینه‌های کاربردی دنیای واقعی صورت پذیرفته است. صورت‌بندی ریاضی همگامی معمولاً با مدل کوراموتو<sup>۳</sup> انجام می‌شود که در ۱۹۷۵ برای توصیف رفتار مجموعه‌ای بزرگ از نوسانگرهای جفت‌شده با فرکانس‌های ذاتی

مختلف ارائه شد [۲۲، ۲۳] و تاکنون به خوبی به عنوان چارچوبی نظری برای بررسی سیستم‌های نوسانگرهای جفت‌شده در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و سایر سیستم‌های دینامیکی عمل کرده است.

یکی از مسئله‌های بسیار مهم در مطالعه شبکه‌های نوسانگرهای جفت‌شده، توصیف و پیش‌بینی رفتار نوسانگرها با توجه به ساختار شبکه است. ساختار شبکه نقش مهمی در میزان همگامی و متعاقب آن پیش‌بینی رفتار جمعی عوامل جفت‌شده در بسیاری از روابط مهم اقتصادی [۴۲]، فعالیت‌های الکتریکی نورون‌ها [۱۴]، و گسترش اطلاعات یا بیماری در شبکه‌های اجتماعی [۲۶، ۳۰] ایفا می‌کند، و نیز به نظر می‌رسد که پیکربندی مجدد شبکه عصبی بیولوژیکی در طول دینامیک یادگیری انسان، هسته اصلی وقوع یادگیری (همگامی نورون‌ها) در مغز است [۵]. از این رو بخش قابل توجهی از پیشینه پژوهش به بررسی اثر خواص دینامیکی و ساختاری شبکه‌های نوسانگرهای جفت‌شده بر میزان همگامی در سیستم دینامیکی مربوطه اختصاص دارد [۴۳، ۴۱، ۴۰، ۳۹، ۳۸، ۳۷، ۳۵، ۳۴، ۲۷، ۲۱، ۱۹، ۱۷، ۱۶، ۱۲، ۳]. نکته قابل توجه این است که در واقع، در بسیاری از سیستم‌های شبکه‌ای دینامیکی اتصالات شبکه‌ها به‌طور مداوم تغییر می‌کنند؛ بنابراین بسیار مهم است که بدانیم چگونه می‌توان برای بهبود همگامی گره‌های شبکه، پیوندهای شبکه‌ای را براساس فرایندهای دینامیکی بازآرایی کرد، و به همین دلیل بخش قابل توجهی از پژوهش‌های مربوط به ساختار شبکه بر نحوه طراحی سازوکارهایی برای تغییر پیکربندی شبکه‌ها و بازآرایی پیوندها بر مبنای ویژگی‌های کمی یا کیفی موضعی یا سرتاسری ساختار شبکه‌های پیچیده متمرکز است.

روش‌های مختلف بازآرایی پیوندها را می‌توان برحسب معطوف بودنشان به خواص موضعی یا سرتاسری شبکه طبقه‌بندی کرد. روش‌های موضعی بیشتر به نقش هر پیوند توجه می‌کنند و در مقابل، روش‌های سرتاسری بیشتر به اثر بازآرایی پیوندها بر رفتار کلی شبکه می‌پردازند،

3 - Coupled  
4 - Kuramoto model

و حتی در مواردی بسامدهای ذاتی<sup>۵</sup> نوسانگرها را هم در نظر می‌گیرند. به‌عنوان نمونه‌ای از روش‌های موضعی، هگبرگ و شولت در [۱۸] سازوکار بازآرایی را با هدف نزدیک کردن بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار و دومین کوچک‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسی<sup>۶</sup> پیشنهاد می‌کنند: در هر تکرار، یالی که بیشترین تأثیر را بر بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار دارد حذف می‌شود و یالی که بیشترین تأثیر را بر دومین کوچک‌ترین ویژه‌مقدار دارد اضافه می‌شود. در [۲۰]، در این سازوکار تجدید نظر شده است، و از آنجا که بیشترین درجه شبکه کران بالایی برای بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسی<sup>۶</sup> به دست می‌دهد، دو سازوکار دیگر مبتنی بر درجه گره‌ها پیشنهاد و نتایج تجربی آن‌ها گزارش شده است. نمونه دیگر، کار پاپادوپولس و همکاران در [۲۹] است که در بازه زمانی شروع دینامیک شبکه تا زمان وضعیت پایدار، همگامی دوتایی گره‌ها در زمان‌های مشخص را معیار سنجش قرار داده‌اند: بعد از سپری شدن مدتی معین به‌عنوان دوره استراحت، گرهی از مجموعه گره‌های مجاز انتخاب می‌شود، براساس میزان اختلاف فازهای نوسانگر گره انتخابی و نوسانگرهای گره‌های همسایه آن، پیوندی برای حذف انتخاب می‌شود و بالاخره این گره به یک گره غیرهمسایه تصادفی متصل می‌شود، و همین روند در بازه‌های زمانی مشخصی به تعداد دفعات مشخصی تکرار می‌شود. رویکرد مشابهی در [۱۳] اتخاذ شده است که در آن مقدار تابع احتمال برحسب اختلاف فاز بین هر دو نوسانگر جفت‌شده و تعداد نوسانگرهای شبکه در زمان‌های مشخص اندازه‌گیری می‌شود و کارایی مدل نیز به‌صورت عددی شبیه‌سازی و گزارش شده است.

در مقابل روش‌های موضعی، روش‌های سرتاسری می‌کوشند که با جابه‌جا کردن پیوندهای شبکه آن را به سوی برآورده شدن توصیفی کیفی یا معیاری کمی سوق بدهند. به‌عنوان مثال، بارهونا و پکورا در [۴] با شبیه‌سازی‌های عددی نشان داده‌اند که با افزودن

میان‌برهای تصادفی می‌توان میزان همگامی را بین گره‌های جفت‌شده در شبکه‌های پیچیده بهبود بخشید. شواهد ارائه شده توسط چاوز و همکاران در [۹] نیز نشان می‌دهند که در شبکه‌های مستقل از مقیاس<sup>۷</sup>، می‌توان با وزندهی به هر پیوند بر مبنای نسبت تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای شبکه که از آن پیوند استفاده می‌کنند، میزان همگامی را افزایش داد. کار اسکاردا<sup>۸</sup> و همکاران در [۴۰] نمونه مهمی از ارائه شاخصی کمی برای ارزیابی شبکه است: با استفاده از ماتریس لاپلاسی<sup>۶</sup> شبکه و فرکانس‌های ذاتی، تابع تراز همگامی<sup>۹</sup> (SAF) طوری ساخته می‌شود که در صورت نزدیک بودن شبکه به همگامی کامل در حالت پایدار<sup>۱۰</sup>، کاهش مقدار آن با افزایش میزان همگامی معادل شود. با درست داشتن این تابع، سازوکار پیشنهادی آن‌ها عبارت است از جابه‌جا کردن تصادفی یک پیوند و رد یا قبول تغییر اعمال شده در شبکه برحسب اضافه یا کم شدن مقدار تابع تراز همگامی برای شبکه جدید، و تکرار این فرایند به دفعات مشخص. آن‌ها با شبیه‌سازی‌های عددی محدود نشان داده‌اند که این روش به‌ازای مقدارهای نسبتاً زیاد قدرت جفت‌شدگی<sup>۱۰</sup> ثابت در شبکه، میزان همگامی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر می‌کند. پینتو و سا در [۳۲] با رویکردی مشابه و نیز تابعی معادل تابع تراز همگامی، سازوکاری برای بازآرایی شبکه پیشنهاد می‌کنند. اسکاردا<sup>۸</sup> و همکاران در [۷] اذعان دارند که به‌نظر می‌رسد تکنیک ارائه شده در [۴۰] که صرفاً مبتنی بر اطلاعات سرتاسری است به تنهایی برای بهبود همگامی در شبکه‌های کوراموتو کافی نیست، و روشی برای بهبود همگامی در زیرسیستم‌های کوچک‌تر و استفاده از آن‌ها برای بهبود همگامی کل سیستم ارائه می‌کنند.

در پژوهش حاضر، سازوکاری برای بازآرایی پیوندهای شبکه کوراموتو ارائه می‌کنیم که در آن، از اطلاعات موضعی در سطح پیوندها برای انتخاب پیوندی

7 - Scale-free networks

8 - Synchrony Alignment Function

9 - Steady-state

10 - Coupling strength

5 - Intrinsic frequencies

6 - Laplacian matrix

دیفرانسیل (۱) با مقدار اولیه  $\theta(0) = \theta_0$  صدق کند، می‌گوییم « $\theta(t)$ » در سیستم دینامیکی  $(\omega, \theta_0, \kappa A, H)$  صدق می‌کند» که در آن  $\omega = [\omega_1 \dots \omega_N]^T$ . از این به بعد، مطابق صورت‌بندی کلاسیک کوراموتو، فرض می‌کنیم که  $\theta$  در سیستم دینامیکی  $(\omega, \theta_0, \kappa A, \sin)$  صدق می‌کند. میزان همگامی نوسانگرهای جفت شده که بردار فازشان در  $(\omega, \theta_0, \kappa A, H)$  صدق می‌کند، با پارامتر

$$r_{(\omega, \theta_0, \kappa A, H)}(t) = \frac{1}{N} \left\| \sum_{j=1}^N [\cos(\theta_j(t)) \sin(\theta_j(t))]^T \right\|$$

اندازه‌گیری می‌شود که به پارامتر نظم<sup>۱۱</sup> کوراموتو معروف است. بنابر نابرابری مثلث، اندازهٔ مجموع این بردارهای فاز کمتر از مجموع اندازه‌های آن‌ها یا برابر آن است، و تساوی فقط وقتی اتفاق می‌افتد که بردارها باهم برابر باشند؛ پس  $r$  عددی بین صفر و یک است و هرچه به یک نزدیک‌تر باشد، وضعیت بردارهای فاز به انطباق نزدیک‌تر است. در [۱۵] نشان داده شده است که با  $R(t)$  که با  $(r_{(\omega, \theta_0, \kappa A, H)}(t))^2$

تعریف می‌شود، در رابطه‌های

$$R(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \cos(\theta_i(t) - \theta_j(t)) \quad (2)$$

$$R(t) \geq 1 - \frac{1}{N} \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\mathbf{1}\|^2 \quad (3)$$

صدق می‌کند، که در آن  $\bar{\theta}(t) = (\theta_1(t) + \dots + \theta_N(t))/N$  از آنجا که معادلهٔ (۱) جواب بستهٔ صریحی ندارد، معمولاً فرض می‌شود که سیستم در وضعیتی نزدیک به همگامی کامل است و اختلاف فازهای هر دو نوسانگر متصل بسیار کوچک است. تحت این فرض، می‌توانیم  $\sin(\theta_j - \theta_i)$  را تقریباً برابر  $\theta_j - \theta_i$  فرض کنیم، و به این ترتیب به سیستم دینامیکی خطی

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \kappa \sum_{j=1}^N L_{ij} \theta_j \quad (4)$$

می‌رسیم که تقریب قابل قبولی برای سیستم کوراموتوی معادلهٔ (۱) است. در این رابطه  $L = [L_{ij}]$  ماتریس لاپلاسیان  $G$  است و با  $L = D - A$  تعریف می‌شود که در آن  $D$  ماتریسی قطری است که روی قطر آن درجه‌های رأس‌های  $G$  را به ترتیب رأس‌ها قرار داده‌ایم، و به این ترتیب می‌توان

برای حذف و نیز انتخاب دو گره غیر متصل برای ایجاد پیوند جدید استفاده می‌کنیم و سپس بر مبنای مقدار تابع تراز همگامی، تغییر اعمال شده را می‌پذیریم یا به وضع قبلی بر می‌گردیم. به عبارت دقیق‌تر، به جای انتخاب تصادفی پیوند و ایجاد شبکهٔ جدید و سپس رد یا قبول آن، در هر مرحله پیوندهای نامزد حذف و اضافه براساس سهمشان در بهبود همگامی بر اساس تجزیه و تحلیل نظری دینامیک (در حالت بسیار نزدیک به همگامی کامل) تعیین می‌شوند: پیوندی که کارایی کمتری در بهبود همگامی دارد شکسته می‌شود و پیوند جدیدی با کارایی بیشتر ایجاد می‌شود، و سپس شبکهٔ جدید با معیار کم کردن مقدار تابع تراز همگامی قبول یا رد می‌شود. با توجه به تحلیل نظری وضعی که دینامیک بسیار نزدیک به همگامی کامل است، در این پژوهش کارآیی پیوندها بر اساس طیف ماتریس لاپلاسیان سنجیده می‌شود.

## ۱. مقدمات و تعاریف اولیه

در این بخش به اختصار به بیان تعاریف، نمادها و گزاره‌هایی می‌پردازیم که در ادامه از آن‌ها استفاده می‌شود. شرح و جزئیات را می‌توان در [۱۵] یافت. شبکهٔ همبند نوسانگرها را با  $G = (V, E)$  نشان می‌دهیم که در آن  $V = \{1, \dots, N\}$  و  $E$  به ترتیب مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های  $G$  هستند. به ازای هر  $1 \leq i \leq N$  فرض می‌کنیم که نوسانگر  $i$ م روی رأس  $i$  قرار دارد، بسامد ذاتی این نوسانگر را با  $\omega_i$  و فاز آن را در زمان  $t$  با  $\theta_i(t)$  نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که  $\theta$ ها در معادلهٔ کوراموتو که به صورت

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \kappa \sum_{n=1}^N A_{ij} H(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (1)$$

نوشته می‌شود، صدق می‌کنند. در این معادله  $A = [A_{ij}]$  ماتریس اتصال شبکه است، عدد مثبت  $K$  نشان دهندهٔ میزان قدرت جفت‌شدگی هر دو نوسانگر متصل است، و  $H(\theta)$  تابعی متناوب با دورهٔ تناوب  $2\pi$  است که  $H(0) = 0$  و  $H'(0) \neq 0$ . اگر برداری مانند  $\theta(t) = [\theta_1(t) \dots \theta_N(t)]^T$  در معادلهٔ

11-Order parameter

معادله (۴) را به شکل برداری

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \kappa L\theta \quad (5)$$

بازنویسی کرد. معادله (۵) جواب صریحی برحسب ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای  $L$  دارد، و می‌توان نشان داد که این ویژه‌مقدارها حقیقی‌اند، کوچک‌ترینشان صفر است و بقیه مثبت‌اند، و ویژه‌بردارهای متناظر آن‌ها هم مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند [۱۱]. این ویژه‌مقدارها را با  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  و ویژه بردار یک‌ه متناظر  $\lambda_i$  را با  $v_i$  نمایش می‌دهیم. روشن است که  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  پایه مرتبی برای  $\mathbb{R}^N$  است. جواب صریح معادله (۵) عبارت است از

$$\begin{aligned} \theta(t) &= t v_1 v_1^T \omega + v_1 v_1^T \theta(0) + \sum_{j=2}^N \left( v_j v_j^T \left( \frac{-1}{\kappa \lambda_j} \omega + \theta(0) \right) e^{-\kappa \lambda_j t} + \frac{1}{\kappa \lambda_j} v_j v_j^T \omega \right) \\ &= (\bar{\omega} t + \bar{\theta}(0)) \mathbf{1} + \sum_{j=2}^N \left( v_j v_j^T \left( \frac{-1}{\kappa \lambda_j} \omega + \theta(0) \right) e^{-\kappa \lambda_j t} + \frac{1}{\kappa \lambda_j} v_j v_j^T \omega \right) \end{aligned}$$

به‌ازای  $\varepsilon > 0$  داده شده، فرض کنید

$$t > -\frac{1}{\kappa \lambda_2} \ln \frac{\kappa \lambda_2 \varepsilon}{N(\|\omega\| + \kappa \lambda_2 \|\theta(0)\|)} \quad (6)$$

دراین صورت به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$\left\| \sum_{j=2}^N v_j v_j^T \left( \frac{-1}{\kappa \lambda_j} \omega + \theta(0) \right) e^{-\kappa \lambda_j t} \right\| \leq \varepsilon,$$

و در نتیجه، جواب تقریبی معادله (۵) به‌ازای  $t$  به‌اندازه

کافی بزرگ عبارت است از

$$\theta(t) = (\bar{\omega} t + \bar{\theta}(0)) \mathbf{1} + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=2}^N \frac{-1}{\lambda_j} v_j v_j^T \omega \quad (7)$$

بنابراین  $\frac{d\theta}{dt} = \bar{\omega} \mathbf{1}$ ، و در نتیجه، اگر دینامیک سیستم

در زمان کافی پیش برود آنگاه

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \dots = \frac{d\theta_N}{dt} = \bar{\omega}$$

که یعنی نوسانگرها با سرعت زاویه‌ای یکسان نوسان می‌کنند. این وضعیت به همگامی فاز قفل شده<sup>۱۲</sup> معروف است [۲].

ماتریس شبه وارون  $L^{13}$  را، که با  $L^\dagger = \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j} v_j v_j^T$  تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. روشن است که  $L^\dagger v_1 = 0$  و  $L^\dagger v_i = \frac{1}{\lambda_i} v_i$  به‌ازای  $1 < i \leq N$ ؛ در نتیجه،  $L^\dagger$  روی  $V_1 = \text{span}(\{v_1\})$  عملگر صفر است و روی  $V_1^\perp = \text{span}(\{v_2, \dots, v_N\})$  یکرختی<sup>۱۳</sup> است. معادله (۷) را می‌توان به‌صورت

$$\theta(t) = (\bar{\omega} t + \bar{\theta}(0)) \mathbf{1} + \frac{1}{\kappa} L^\dagger \omega \quad (8)$$

نوشت، که نشان می‌دهد مؤلفه‌های  $\theta(t)$  در  $V_1^\perp$  و  $V_1$  به‌ترتیب عبارت‌اند از  $\bar{\theta}(t) \mathbf{1} = (\bar{\omega} t + \bar{\theta}(0)) \mathbf{1}$  و

$$\theta(t) - \bar{\theta}(t) \mathbf{1} = \frac{1}{\kappa} L^\dagger \omega, \quad (9)$$

که آن را با  $\theta^*(t)$  نشان می‌دهیم. به‌همین ترتیب، مؤلفه  $\omega$  در  $V_1^\perp$  را هم با  $\omega^*$  نشان می‌دهیم. بنابراین با استفاده از معادله (۹) به‌ازای هر  $t$  در محدوده رابطه (۶) به‌دست می‌آید

$$L^\dagger \omega^* = L^\dagger \omega = L^\dagger \theta^*(t),$$

و در نتیجه

$$\|\theta^*\| = \frac{1}{\kappa} \|L^\dagger \omega\|. \quad (10)$$

با استفاده از رابطه (۳) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} R(t) &\geq 1 - \frac{1}{N} \|\theta(t) - \bar{\theta}(t) \mathbf{1}\|^2 \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa N} \|L^\dagger \omega\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

که یعنی  $Lb(\omega) = 1 - \frac{1}{\kappa N} \|L^\dagger \omega\|^2$  کران پایینی برای  $R(t)$  است - به‌عبارت دیگر،  $R(t) \in [Lb(\omega), 1]$ .

## ۲. سازوکار بازآرایی پیوندها

سازوکارهای بازآرایی شبکه، با هدف تغییر پیوندهای شبکه به‌منظور افزایش میزان همگامی طراحی می‌شوند. در هر مرحله بازآرایی، می‌توان یک یا چند پیوند یا مسیر را حذف یا اضافه کرد؛ اما معمولاً تعداد کل پیوندها ثابت نگه داشته می‌شود. از آنجا که ساختار شبکه خویشاوندی بسیار نزدیکی با تقریب خطی دینامیک کوراموتو دارد، طراحی و تحلیل سازوکارها معمولاً بر پایه شکل خطی دینامیک انجام می‌شود؛ هرچند که راهکارهای دیگری هم

13-Isomorphism

12-Phase-lock synchronization

(از جمله در [۲۹]) آزموده شده است.

ترتیب، در هر مرحله شبکه‌ای به دست می‌آید که نسبت  $\lambda_2/\lambda_N$  در آن بیش از شبکه قبلی است.

اسکاردا و همکاران در [۴۰، ۴۱]، سازوکاری برای بازآرایی پیوندهای شبکه پیشنهاد کرده‌اند که به جای بررسی نقش هر پیوند، با حذف و افزودن تصادفی پیوندها به دنبال شبکه‌ای با مقدار بیشتر  $Lb(\omega)$  است. آن‌ها در [۴۰]، تابع تراز همگامی دستگاه مفروض کوراموتو را با

$$J(\omega, L) = \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j^2} (v_j, \omega)^2$$

تعریف می‌کنند. چون

$$J(\omega, L) = \frac{1}{N} \|L^+ \omega\|^2 = 1 - \kappa Lb(\omega)$$

مقدار  $J(\omega, L)$  به نوعی میزان خطای خطی سازی را نشان می‌دهد، و کم بودن آن به نوعی معادل است با نزدیک بودن تقریب خطی به دستگاه اصلی. این سازوکار، که از آن به عنوان الگوریتم رد - قبول<sup>۱۴</sup> یاد می‌کنند، از این قرار است:

۱. یک یال به طور تصادفی انتخاب و حذف کنید.
۲. دو گره تصادفی را که به هم متصل نیستند متصل کنید.
۳. ماتریس لاپلاسیین شبکه جدید را با  $L'$  نشان دهید. اگر  $J(\omega, L') < J(\omega, L)$  آنگاه شبکه جدید پذیرفته می‌شود وگرنه رد می‌شود.

این فرایند  $s$  بار تکرار می‌شود. در سازوکار اصلاح شده در [۷]، ابتدا شبکه افزای می‌شود و سپس مراحل فوق روی هر کدام از زیرشبکه‌ها اعمال می‌شوند. در گزارش شبیه‌سازی‌ای که در [۴۰] به ازای  $s = 2 \times 10^4$  تکرار آمده، در حالی که این بازآرایی به ازای مقدارهای نسبتاً زیاد  $\kappa$  مقدار پارامتر نظم را به طور قابل توجهی به ۱ نزدیک می‌کند، به ازای مقدارهای کم  $\kappa$  عملاً باعث می‌شود که مقدار پارامتر نظم به صفر نزدیک شود و در نتیجه به نظر می‌رسد که این بازآرایی دست کم به ازای مقدارهای کم قدرت جفت‌شدگی روش مناسبی نیست.

در جستجوی روشی برای بازآرایی به ازای مقدارهای

بر مبنای آنچه در قسمت پیش دیدیم، از این پس، تلاش می‌کنیم که مقدار  $Lb(\omega)$  را با تغییر ساختار شبکه افزایش بدهیم. چون  $L^+ \omega = L^+ \omega^*$ ، ضریب ویژه بردار  $v_1$  در  $\omega$  اثری در  $Lb(\omega)$  ندارد، و نیز می‌توان نشان داد که افزایش ناشی از تغییر ضریب‌های بردارهای  $v_2, \dots, v_{N-1}$  در  $\omega$  را هم می‌توان با تغییر مناسب ضریب  $v_N$  به دست آورد [۱۵]. به علاوه، چون بردارهای  $v_1, \dots, v_N$  بردارهای متعامد و یکه هستند، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} Lb(\omega) &= 1 - \frac{1}{\kappa N} \|L^+ \omega\|^2 = 1 - \frac{1}{\kappa N} \left\langle \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j} v_j v_j^T \omega, \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j} v_j v_j^T \omega \right\rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa N} \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j^2} (v_j v_j^T \omega, v_j v_j^T \omega) \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa N} \sum_{j=2}^N \frac{1}{\lambda_j^2} \|\omega\|^2 \end{aligned}$$

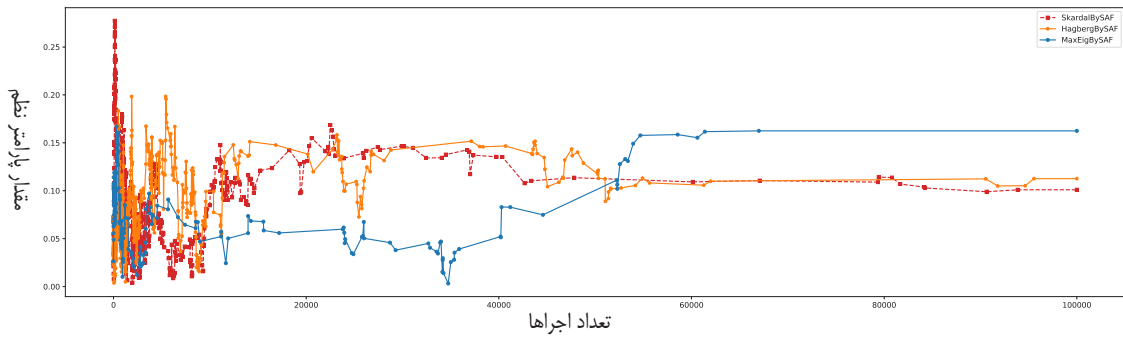
اثر تغییر میانگین و انحراف معیار بردار بسامد زاویه‌ای اولیه در [۱۵] بررسی شده است و نشان داده شده که بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد میانگین  $\omega$  صفر است؛ بنابراین  $\|\omega\| = \sigma(\omega)$  و در نتیجه

$$1 - \frac{\sigma(\omega)^2}{\kappa \lambda_2^2} \leq Lb(\omega) \leq 1 - \frac{\sigma(\omega)^2}{\kappa \lambda_N^2}. \quad (۱۲)$$

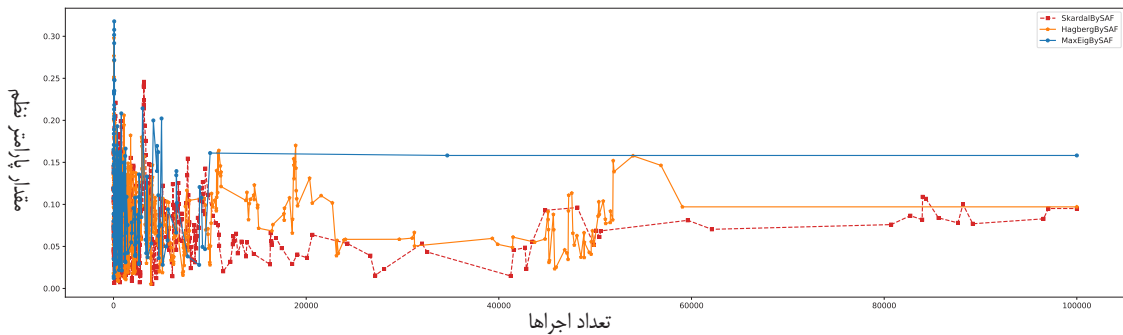
با بازنویسی رابطه (۱۲) به صورت

$$\frac{1}{\lambda_N^2} \leq (1 - Lb(\omega)) \times \frac{\kappa}{\sigma(\omega)^2} \leq \frac{1}{\lambda_2^2},$$

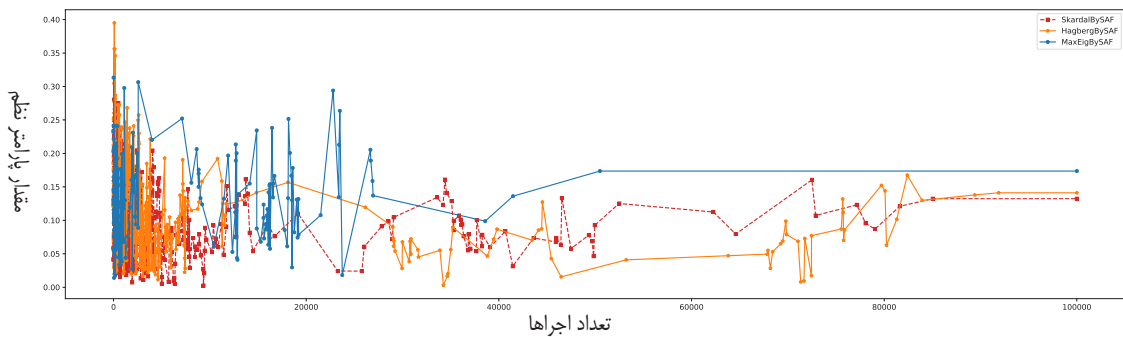
به نظر می‌رسد که اضافه کردن  $\lambda_2$  و کم کردن  $\lambda_N$  مقدار  $Lb(\omega)$  را به یک نزدیک می‌کند. هگ‌برگ و شولت در [۱۸] بدون این تحلیل و صرفاً براساس تحلیل بارهونا و پکورا در [۴] که بر مبنای مدل خطی نقش نسبت  $\lambda_2/\lambda_N$  را در رخ دادن همگامی بررسی کرده‌اند، الگوریتمی برای افزایش نسبت  $\lambda_2/\lambda_N$  ارائه کرده‌اند. آن‌ها در هر مرحله از بین پیوندهای موجود در شبکه، پیوندی را حذف می‌کنند که بیشترین سهم را در مقدار  $\lambda_N$  دارد، و پیوندی را اضافه می‌کنند که بیشترین سهم را در مقدار  $\lambda_2$  دارد و به این



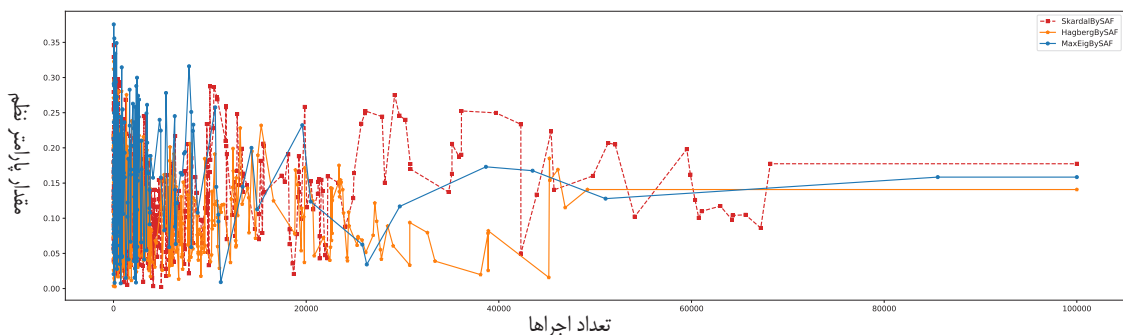
(الف)  $(r_M, e) = (0.1625, 197)$ ,  $(r_H, e) = (0.1126, 571)$ ,  $(r_S, e) = (0.1010, 559)$ ,  $r = 0.263$ ,  $\kappa = 0.5$



(ب)  $(r_M, e) = (0.1582, 179)$ ,  $(r_H, e) = (0.0970, 586)$ ,  $(r_S, e) = (0.0951, 518)$ ,  $r = 0.736$ ,  $\kappa = 0.10$



(ج)  $(r_M, e) = (0.1736, 214)$ ,  $(r_H, e) = (0.1412, 566)$ ,  $(r_S, e) = (0.1323, 574)$ ,  $r = 0.230$ ,  $\kappa = 0.15$



(د)  $(r_M, e) = (0.1584, 228)$ ,  $(r_H, e) = (0.1408, 594)$ ,  $(r_S, e) = (0.1774, 601)$ ,  $r = 0.565$ ,  $\kappa = 0.20$

شکل ۱. تغییرات پارامتر نظم در روش‌های مختلف بازآرایی به‌ازای قدرت‌های مختلف جفت‌شدگی.  $\kappa$ : قدرت جفت‌شدگی،  $r$ ،  $r_S$ ،  $r_H$ ،  $r_M$ : به‌ترتیب پارامتر نظم اولیه، با بازآرایی اسکاردال و دیگران، با بازآرایی هگ‌برگ و شولت (با SAF)، با بازآرایی مقاله حاضر،  $e$ : تعداد بازآرایی‌های موثر.

نیستند، آن‌هایی را بیابید که بیشترین مقدار  $|v_{iN} - v_{jN}|$  را به دست می‌دهند.

ج) یکی از این دوتایی‌ها را به‌طور تصادفی انتخاب کنید و آن‌ها را به هم وصل کنید.

۳. ماتریس لاپلاسیین شبکه جدید را با  $L'$  نشان دهید. اگر  $J(\omega, L') < J(\omega, L)$ ، آنگاه شبکه جدید پذیرفته می‌شود، وگرنه رد می‌شود.

از آنجا که ممکن است نامزد حذف ارزش صفر داشته باشد و یا حذف یال موجب ناهمبندی شبکه شود، می‌توانیم بازه اطمینانی برای انتخاب تصادفی یک پیوند ناکارآمد و یک پیوند [ناموجود، اما بالقوه] کارآمد در نظر بگیریم. به این ترتیب، در مرحله انتخاب پیوند برای حذف، کارآمدی همه یال‌های شبکه را محاسبه می‌کنیم و نتایج را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و یالی را به تصادف از  $\alpha$  درصد پایینی برای حذف انتخاب می‌کنیم، و سپس کارآمدی را برای یال‌های مکمل شبکه جدید محاسبه و نتایج را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و از یال‌هایی که مقادیر کارآمدی آن‌ها در  $\beta$  درصد بالایی هستند یک یال را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در شکل (۱) نتیجه‌های نوعی اجرای هر دو الگوریتم را برای بیش از ۵۰ شبکه Watts–Strogatz با  $N = 100$  و بسامدهای ذاتی با توزیع توانی و میانگین و واریانس به ترتیب ۰ و ۱ برای  $s = 10^5$  اجرا آورده‌ایم، و در کنار آن‌ها نتایج مربوط به بازآرایی هگ‌برگ و شولت (با SAF) را هم آورده‌ایم که در آن انتخاب پیوندها برای حذف و اضافه به ترتیب براساس بیشترین سهم در  $\lambda_N$  (در ۱) «بیشترین مقدار  $|v_{iN} - v_{jN}|$ » و بیشترین سهم در  $\lambda_2$  (در ۲) «بیشترین مقدار  $|v_{i2} - v_{j2}|$ » انجام می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که به‌ازای مقدارهای کم  $\kappa$  الگوریتم اصلاح شده عملکرد بهتری دارد: مقدار بیشتری برای پارامتر نظم به دست می‌آید، و این مقدار بهتر با اعمال تغییرهای کمتر در شبکه به دست می‌آید.

در عین حال که همواره باید در نظر داشت که نتیجه‌های عددی قویاً وابسته به شرایطی هستند که قابل تکرار نیستند

کم قدرت جفت‌شدگی، به رابطه (۱۲) بر می‌گردیم. از نامساوی راست، بر می‌آید که به‌ازای مقدارهای کوچک  $\kappa$ ، خود عبارت  $1 - \sigma(\omega)^2 / \kappa \lambda_N^2$  مانع زیاد شدن مقدار  $Lb(\omega)$  است، و ثابت بودن مقدار  $\sigma(\omega)$  ایجاب می‌کند که تنها راه برداشتن این مانع، اضافه کردن مقدار  $\lambda_N$  است. به این ترتیب، پذیرفتنی به نظر می‌رسد که به جای انتخاب تصادفی پیوندها برای حذف و اضافه، آن‌ها را براساس سهمشان در افزایش بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار انتخاب کنیم. برای ارزیابی سهم هر پیوند، فرض می‌کنیم که  $L(i, j)$  ماتریس لاپلاسیین شبکه  $(V, \{i, j\})$  است؛ پس

$$L = \sum_{ij \in E} L(i, j) \quad \text{و در نتیجه}$$

$$\lambda_k = \mathbf{v}_k^T L \mathbf{v}_k = \sum_{ij \in E} \mathbf{v}_k^T L(i, j) \mathbf{v}_k \quad (13)$$

$$= \sum_{ij \in E} (v_{ik} - v_{jk})^2$$

که در آن  $\mathbf{v}_{rs}$  مولفه  $r$  ام  $\mathbf{v}_s$  است.

معادله (۱۳) به‌طور صریحی سهم هر پیوند را در هر یک از ویژه‌مقدارها به دست می‌دهد؛ به این ترتیب می‌توانیم در هر مرحله از الگوریتم رد - قبول، پیوندی را انتخاب کنیم که سهم مناسبی در بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار دارد و بر همین اساس، سازوکار اصلاح شده زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱. یک یال را برای حذف به این ترتیب انتخاب کنید:

الف) بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسیین و ویژه‌بردار آن را محاسبه کنید.

ب) بین همه دوتایی‌های  $(i, j)$  که در شبکه به هم وصل هستند، آن‌هایی را بیابید که کمترین مقدار  $|v_{iN} - v_{jN}|$  را به دست می‌دهند.

ج) یکی از این دوتایی‌ها را به‌طور تصادفی انتخاب و پیوندشان را حذف کنید.

۲. دو گره را برای اتصال پیوند بین آن‌ها به این ترتیب انتخاب کنید:

الف) بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسیین جدید و ویژه‌بردار آن را محاسبه کنید.

ب) بین همه دوتایی‌های  $(i, j)$  که در شبکه به هم وصل



و لزوماً چیزی را ثابت نمی‌کنند، نمی‌توان از جذابیت و البته اهمیت آن‌ها صرف‌نظر کرد. یکی از نکات قابل توجه این است که به نظر می‌رسد سازوکار پیشنهادی اسکار دال و دیگران، دست‌کم به‌ازای مقادیر کم قدرت جفت‌شدگی به‌هیچ‌وجه رفتار «پایدار» ندارد و اقلماً تا پیش از  $7 \times 10^4$  اجرا، تعداد دفعات اجرای الگوریتم به‌شدت بر مقدار گزارش شده پارامتر نظم مؤثر است (و در نتیجه، مقدارهای گزارش شده در [۴۰] به‌ازای  $s = 2 \times 10^4$  چندان موجه به‌نظر نمی‌رسند). سازوکار پیشنهادی هگ‌برگ و شولت (با SAF) از این بابت رفتار بهتری نشان می‌دهد؛ اما اجرای آن هزینه بیشتری دارد و باعث بهبود قابل توجهی در مقدار پارامتر نظم هم نمی‌شود. در مقابل، به‌نظر می‌رسد با الگوریتم اصلاح شده حاضر مقدار پارامتر نظم به‌طور قابل قبولی پایداری نشان می‌دهد. این امر البته به معنای این نیست که مقدار پایدار نهایی بهترین مقدار «ممکن» پارامتر نظم است، و در همه نمونه‌ها هر سه الگوریتم حتی در همان بازآرایی‌های اولیه شبکه به آرایش‌هایی می‌رسند که به‌وضوح همگامی بیشتری دارند؛ اما به‌سادگی این آرایش‌ها را از دست می‌دهند.

### ۳- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با تحلیل سهم پیوندهای شبکه در مقدار بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسین آن سازوکاری برای بازآرایی پیوندهای شبکه به‌منظور بهبود همگامی دینامیک کوراموتو به‌ازای مقادیر کم قدرت جفت‌شدگی پیشنهاد کردیم، و بر مبنای شواهد عددی نشان دادیم که استفاده از این روش نسبت به روش‌های پیشین برای خانواده‌ای از شبکه‌ها و بسامدهای ذاتی به نتیجه بهتری می‌انجامد. علاوه‌بر بررسی‌های نظری برای درک و توجیه بهتر رفتار سازوکار حاضر، بررسی کارکرد آن در مورد خانواده‌های دیگری از شبکه‌ها و بسامدهای ذاتی و یافتن روش‌های دیگری برای انتخاب پیوندهای شبکه در کنار بررسی پایداری آرایش و اثر پارامترهای شبکه (از قبیل

تعداد گره‌ها، تعداد پیوندها، حداقل پیوندهای متصل به هر گره، میانگین فاصله و نظایر آن‌ها) بر وجود آرایش پایدار و تعداد مراحل لازم برای رسیدن به آن از موضوع‌های جالب توجه برای پژوهش‌های آینده هستند.

### مراجع

- [۱] س. حسین قربان، ب. حسام، ح. سربازی آزاد. سازوکاری برای بهبود همگامی در شبکه‌های کوراموتو از طریق بازآرایی پیوندها. مجموعه مقالات سومین کنفرانس ملی انفورماتیک ایران، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، ۳۶-۴۱، ۱۴۰۰.
- [2] D. Aeyels and J. A. Rogge. Existence of partial entrainment and stability of phase locking behavior of coupled oscillators. *Progress of Theoretical Physics*, 112(6):921–942, 2004.
- [3] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, and C. J. Pérez-Vicente. Synchronization reveals topological scales in complex networks. *Physical review letters*, 96(11):114102, 2006.
- [4] M. Barahona and L. M. Pecora. Synchronization in small-world systems. *Physical review letters*, 89(5):054101, 2002.
- [5] D. S. Bassett, N. F. Wymbs, M. A. Porter, P. J. Mucha, J. M. Carlson, and S. T. Grafton. Dynamic reconfiguration of human brain networks during learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(18):7641–7646, 2011.
- [6] J. B. Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. *The Quarterly Review of Biology*, 13(3):301–314, 1938.
- [7] P. R. Chamlagai, P. S. Skardal, and D. Taylor. Grass-roots optimization of coupled oscillator networks. *arXiv preprint arXiv:2109.07426*, 2021.
- [8] H.-D. Chang, C.-C. Chu, and G. Cauley. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications, and perspective. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1497–1529, 1995.
- [9] M. Chavez, D.-U. Hwang, A. Amann, H. Hentschel, and S. Boccaletti. Synchronization is enhanced in weighted complex networks. *Physical Review Letters*, 94(21):218701, 2005.
- [10] S. M. Crook, G. B. Ermentrout, M. C. Vanier, and J. M. Bower. The role of axonal delay in the synchronization of networks of coupled cortical oscillators. *Journal of computational neuroscience*, 4(2):161–172, 1997.
- [11] D. Cvetkovic, S. Simic, and P. Rowlinson. *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge University Press, 2009.
- [12] H. Daido. Multibranch entrainment and scaling in large populations of coupled oscillators. *Physical review letters*, 77(7):1406, 1996.
- [13] Y.-H. Eom, S. Boccaletti, and G. Caldarelli. Concurrent enhancement of percolation and synchronization in adaptive networks. *Scientific reports*, 6(1):1–7, 2016.
- [14] G. B. Ermentrout and D. H. Terman. *Mathematical foundations of neuroscience*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2010.
- [15] S. Hossein Ghorban, F. Baharifard, B. Hesaam, M. Zarei,

Review E, 92(6):062801, 2015.

[33] A. Pluchino, S. Boccaletti, V. Latora, and A. Rapisarda. Opinion dynamics and synchronization in a network of scientific collaborations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 372(2):316–325, 2006.

[34] J. G. Restrepo and E. Ott. Mean-field theory of assortative networks of phase oscillators. *EPL (Europhysics Letters)*, 107(6):60006, 2014.

[35] J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt. Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Physical Review E*, 71(3):036151, 2005.

[36] J. W. Simpson-Porco, F. Dörfler, and F. Bullo. Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids. *Automatica*, 49(9):2603–2611, 2013.

[37] P. S. Skardal and J. G. Restrepo. Hierarchical synchrony of phase oscillators in modular networks. *Physical Review E*, 85(1):016208, 2012.

[38] P. S. Skardal, E. Ott, and J. G. Restrepo. Cluster synchrony in systems of coupled phase oscillators with higherorder coupling. *Physical Review E*, 84(3):036208, 2011.

[39] P. S. Skardal, J. Sun, D. Taylor, and J. G. Restrepo. Effects of degree-frequency correlations on network synchronization: Universality and full phase-locking. *EPL (Europhysics Letters)*, 101(2):20001, 2013.

[40] P. S. Skardal, D. Taylor, and J. Sun. Optimal synchronization of complex networks. *Physical review letters*, 113(14):144101, 2014.

[41] P. S. Skardal, D. Taylor, and J. Sun. Synchronization of network-coupled oscillators with uncertain dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79(6):2409–2433, 2019.

[42] A. Watts. A dynamic model of network formation. *Games and Economic Behavior*, 34(2):331–341, 2001.

[43] D. Witthaut and M. Timme. Kuramoto dynamics in hamiltonian systems. *Physical Review E*, 90(3):032917, 2014.

and H. Sarbazi-Azad. Linearization error in synchronization of kuramoto oscillators. *Applied Mathematics and Computation*, 411:126464, 2021.

[16] J. Gómez-Gardeñes, Y. Moreno, and A. Arenas. Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks. *Physical Review E*, 75(6):066106, 2007.

[17] J. Gómez-Gardenes, S. Gómez, A. Arenas, and Y. Moreno. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Physical review letters*, 106(12):128701, 2011.

[18] A. Hagberg and D. A. Schult. Rewiring networks for synchronization. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, 18(3):037105, 2008.

[19] T. Ichinomiya. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Physical Review E*, 70(2):026116, 2004.

[20] M. Jalili and A. A. Rad. Comment on “rewiring networks for synchronization” [chaos 18, 037105 (2008)]. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, 19(2):028101, 2009.

[21] D. J. Jörg, L. G. Morelli, S. Ares, and F. Jülicher. Synchronization dynamics in the presence of coupling delays and phase shifts. *Physical review letters*, 112(17):174101, 2014.

[22] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*, pages 420–422. Springer, 1975.

[23] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Springer, New York, 1984.

[24] C. Liu, D. R. Weaver, S. H. Strogatz, and S. M. Reppert. Cellular construction of a circadian clock: period determination in the suprachiasmatic nuclei. *Cell*, 91(6):855–860, 1997.

[25] D. C. Michaels, E. P. Matyas, and J. Jalife. Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: a new hypothesis. *Circulation research*, 61(5):704–714, 1987.

[26] J. C. Miller and I. Z. Kiss. Epidemic spread in networks: Existing methods and current challenges. *Mathematical modelling of natural phenomena*, 9(2):4–42, 2014.

[27] Y. Moreno and A. F. Pacheco. Synchronization of kuramoto oscillators in scale-free networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 68(4):603, 2004.

[28] Z. Néda, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, and A.-L. Barabási. Physics of the rhythmic applause. *Physical Review E*, 61(6):6987, 2000.

[29] L. Papadopoulos, J. Z. Kim, J. Kurths, and D. S. Bassett. Development of structural correlations and synchronization from adaptive rewiring in networks of kuramoto oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(7):073115, 2017.

[30] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of modern physics*, 87(3):925, 2015.

[31] A. Pikovsky, J. Kurths, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, volume 12. Cambridge university press, 2003.

[32] R. S. Pinto and A. Saa. Optimal synchronization of kuramoto oscillators: A dimensional reduction approach. *Physical*