

ارزیابی آسیب‌پذیری و ناهمگنی شبکه‌های شبه سرپینسکی

محمد مهدی عمادی کوچک

دانشجوی دکتری دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات - تهران - ایران
پست الکترونیکی: m.m.emadi@srbiau.ac.ir

فرشاد صفایی*

دانشیار دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر - دانشگاه شهید بهشتی - تهران - ایران
پست الکترونیکی: f_safaei@sbu.ac.ir

چکیده

معیارهای استحکام و ناهمگنی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. در بخش پیاده‌سازی معیارها نشان داده می‌شود که از بین شبکه‌های شبه سرپینسکی، شبکه سرپینسکی تعمیم یافته دارای مستحکم‌ترین و نیز همگن‌ترین ساختار عمل می‌کند. تعداد و نوع اشکالات هیچ محدودیتی را به بررسی‌های انجام شده تحمیل نمی‌کند و تلاش بر این بوده تا برای حملات هدفمند الگوهای متنوعی را مورد آزمون قرار دهیم. با این همه، معیارهای مورد استفاده محدود به شبکه‌های شبه سرپینسکی نبوده و قادرند تا برای انواع مختلفی از معیارهای استحکام و ناهمگنی و نیز طیف گسترده‌ای از شبکه‌ها مورد استفاده واقع شوند.

واژه‌های کلیدی: شبکه‌های پیچیده، شبکه‌های شبه سرپینسکی، معیارهای استحکام و شاخص‌های ناهمگنی

۱. مقدمه

در دنیایی از شبکه‌های بهم پیوسته پیچیده و اجتماعی زندگی می‌کنیم که تسهیلات و امکانات حیاتی موجود در آن به میزان زیادی به انواع مختلفی از شبکه‌ها وابستگی دارد. بدین ترتیب لازم است تا این شبکه‌ها از حد بالایی

سیستم‌های ارتباطی غالباً در معرض انواع خرابی‌های تصادفی و حملات هدفمند قرار دارند. در خرابی‌هایی از نوع تصادفی، گره‌ها با احتمال یکسانی دچار خرابی شده و از شبکه حذف می‌شوند. اما در حملات سیستماتیک، گره‌هایی که بیشترین اهمیت را دارند اول از همه مورد حمله واقع می‌شوند. استحکام در قبال اشکالات و خرابی‌ها و نیز برخورد مناسب با حملات و اشکالات یکی از ملزومات اساسی در اغلب شبکه‌ها و سیستم‌های ارتباطی امروزی به شمار می‌رود. بدین ترتیب، لازم است که سیستم‌های ارتباطی، اطمینان‌پذیری، دسترس‌پذیری و استحکام بالایی را در برابر خرابی‌ها، اشکالات و حملات از خود نشان دهند چرا که ممکن است خود به‌عنوان زیرساختی برای بسیاری از شبکه‌های ارتباطی مورد استفاده قرار بگیرند. همچنین، تبیین شباهت‌ها/عدم شباهت‌ها میان مدل‌های مختلف گراف و مطالعه ناهمگنی گراف‌ها، یکی از مسائل پژوهشی بنیادی در مطالعه شبکه‌های پیچیده و اجتماعی محسوب می‌شود. در این مقاله آسیب‌پذیری و ناهمگنی گراف‌های شبه سرپینسکی را همراه با معرفی مجموعه‌ای از مهم‌ترین

* نویسنده مسئول

از استحکام و تاب‌آوری برخوردار باشند. واژگان استحکام و تاب‌آوری در شبکه‌های ارتباطی به توانایی و قابلیت آن‌ها در استمرار و پیوستگی در عملکردشان هنگامی که مؤلفه‌هایشان (یعنی پیوندها و یا گره‌ها) در معرض احتمالات مشخصی از خرابی تصادفی یا حملات سیستماتیک قرار دارند اشاره می‌کند. در طی سال‌های اخیر، طراحی این قبیل شبکه‌ها به یکی از موضوعات مهم پژوهشی در مهندسی و علوم تبدیل شده است. در تحلیل مسائل پایه‌ای قابلیت اطمینان شبکه معمولاً فرض بر این است که هیچ محدودیتی برای انجام مسیریابی و ظرفیت وجود ندارد و از این رو غالباً افت ترافیک ناشی از اشباع یک پیوند به‌عنوان خرابی شبکه در نظر گرفته نمی‌شود. برای تصمیم درباره این‌که آیا شبکه‌ای مستحکم است یا خیر به روشی برای اندازه‌گیری کمی نیاز هست و بایستی تاثیر خرابی‌ها و حملات سیستماتیک را در عملکرد شبکه ارزیابی کنیم.

تاب‌آوری اصطلاحی است که به قابلیت و توانایی هر شبکه برای دفاع و نیز نگهداری سرویس‌های عرضه شده در یک سطح قابل قبول حتی در حضور خرابی‌ها، حملات و چالش‌هایی از این دست اشاره دارد. واژه استحکام نیز که معمولاً در متون و ادبیات تحقیق مترادف با تاب‌آوری به‌کار می‌رود امروزه بیش از هر زمان دیگری به‌عنوان یک نیاز اساسی و مهم در طراحی و پیاده‌سازی سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته است. تاب‌آوری و استحکام چندین زمینه پژوهشی مهم مانند امنیت اطلاعات و شبکه، تحمل‌پذیری اشکال، اتکاء‌پذیری و بقای شبکه‌ها و سیستم‌ها را در بر می‌گیرد. به همین دلیل بخش عمده‌ای از پژوهش در زمینه شبکه‌های پیچیده و اجتماعی حول و حوش این زمینه‌ها سازماندهی شده است.

در طی سال‌های گذشته، معیارهای فراوانی برای سنجش و برآورد میزان تاب‌آوری و استحکام شبکه‌ها پیشنهاد گردیده است؛ لیکن دانشمندان فعال در این عرصه بر سر این‌که کدام یک بر دیگری برتری دارد به توافقی

دست نیافته‌اند و بدین سیاق این نیاز و تلاش کماکان جریان دارد. در این مقاله ما تاب‌آوری و استحکام گراف‌های شبه سرپینسکی را تحت بررسی و ارزیابی قرار دادیم. به‌منظور ارزیابی استحکام انواع مختلف گراف‌های شبه سرپینسکی و نیز سنجش صحت و دقت ارزیابی، تاب‌آوری گراف‌ها در برابر، سه نوع حمله هدفمند مبتنی بر مرکزیت درجه، بینیت و نزدیکی مانده‌ای قرار داده و به کمک معیارهای استحکام تاب‌آوری این گراف‌ها را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم [۱].

از سویی، تبیین شباهت‌ها/عدم شباهت‌ها و تعیین یک‌ریختی میان گراف‌ها، در زمره مسائل و پژوهش‌های مهم در حوزه علوم و مهندسی است که جایگاه ویژه‌ای در حوزه نظری سامانه‌های پیچیده و اجتماعی دارد. سنجش میزان ناهمگنی گراف‌ها، اطلاعات زیادی را درباره آن‌ها در اختیار ما قرار می‌دهد و به دلیل استفاده گسترده از آن‌ها در علوم اجتماعی، پزشکی، زیست‌شناختی و غیره، یافتن شاخص‌های کارآمد در جهت رده‌بندی و تعیین شباهت‌ها میان شبکه‌ها، می‌تواند در بسیاری از موارد مهم و عملی سودمند واقع گردد. شاخص‌های ناهمگنی مختلفی معرفی شده است که در بخش‌های بعد به معرفی آن پرداخته می‌شود.

این مقاله در ۵ بخش سازماندهی شده است. مطالب پیش زمینه درباره گراف و نیز تعاریف و مقدمات مورد نیاز برای درک بهتر مقاله در بخش ۲، بیان گردیده است. همچنین تحلیلی از ناهمگنی و استحکام شبکه‌های شبه سرپینسکی همراه با انواع راهبردهای حمله و نیز معیارهای مختلف برای ارزیابی استحکام و ناهمگنی شبکه‌ها توصیف شده است. در بخش ۳، به بیان انواع مدل‌های مختلف شبکه‌های شبه سرپینسکی، همراه با یک الگوریتم منسجم برای ساخت تمامی آن‌ها در این بخش ارائه گردیده است. نتایج عددی و شرح جزئیات شبیه‌سازی در بخش ۴، آورده شده و سرانجام بخش ۵، به ارائه یافته‌ها و نتیجه‌گیری این مقاله اختصاص یافته است.

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیمی را که در سراسر مقاله از آن‌ها استفاده می‌کنیم را ارائه خواهیم داد. هر گراف G شامل یک مجموعه متناهی از رئوس $V(G)$ و یک مجموعه از لبه $E(G)$ است. برای سهولت، گراف G را معمولاً با نماد $G(V, E)$ نمایش می‌دهیم. اعضای $uv \in E(G)$ یک زیرمجموعه از زوج‌های غیر مرتب $V(G)$ هستند. عناصر $V(G)$ را رئوس گراف G و اعضای $E(G)$ را لبه‌های آن می‌نامیم. چنانچه $e=uv$ یک لبه از گراف G باشد، در این صورت می‌گوییم که رئوس u و v مجاور یکدیگرند و آن‌ها را دو نقطه انتهایی (پایانی) لبه e می‌نامیم. در این مقاله ما تنها با گراف‌های ساده متناهی یعنی بدون جهت و فاقد طوقه یا لبه‌های چندگانه سر و کار خواهیم داشت [5]. یک گراف را همبند می‌گوییم هرگاه برای هر افزایی از مجموعه رئوس آن به دو مجموعه ناتهی X و Y ، لبه‌ای وجود داشته باشد که یک انتهایش در مجموعه X و انتهای دیگرش در مجموعه Y باشد. در غیر این صورت، گراف را ناهمبند می‌نامیم.

حذف هر رأسی مانند $u \in V$ از گراف G را به‌عنوان یک خرابی/حمله فرض می‌کنیم. در نتیجه زیرگراف باقیمانده به‌صورت $G(V \setminus \{u\})$ خواهد شد و لبه‌های متصل به u نیز از گراف حذف خواهد شد. به محض حذف هر رأس، گراف ممکن است به تعدادی مؤلفه همبند تجزیه گردد که تعداد گره‌های واقع در هر یک از آن‌ها (اندازه مؤلفه‌های همبند) می‌تواند معیاری مورد توجه باشد.

امروزه بخش مهمی از نظریه جبری گراف به بررسی و مطالعه طیف ماتریس مجاورت گراف اختصاص یافته و طیف گراف شامل ماتریس‌هایی است که به‌صورت یکتا ساختار گراف را نمایش می‌دهند. طیف ماتریس مجاورت، ماتریس لاپلاسین و ماتریس فاصله از نمونه‌های مهمی از این دست به شمار می‌روند.

یکی از این ماتریس‌هایی که می‌توان گراف‌ها را به کمک آن مطالعه کرد، ماتریس لاپلاسین گراف است.

ماتریس لاپلاسین L عبارت از $(D-A)$ است که D ماتریس قطری و A ماتریس مجاورت گراف است. ماتریس L یک ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت است که جمع سطرهای آن برابر صفر بوده و در نتیجه مقادیر ویژه L حقیقی و مثبت هستند و کوچک‌ترین آن‌ها برابر صفر است. مقادیر ویژه L را می‌توان از کوچک به بزرگ مرتب ساخت $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n)$. برخی از مهم‌ترین معیارهای استحکام مستخرج از مقادیر ویژه ماتریس L عبارتند از اتصال‌پذیری جبری، تعداد درخت‌های فراگیر و مقاومت موثر گراف [۲].

اگر G یک گراف فاقد طوقه و لبه‌های موازی (گراف ساده) باشد، مقادیر ویژه آن با $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ بیان شده و فرض می‌شود که به‌صورت یک شیوه غیرافزایشی برچسب زده می‌شوند $(\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n)$. در این صورت، انرژی گراف G عبارتست از [۲]:

$$E = E(G) = 2 \sum_{i: \mu_i > 0} \mu_i = \sum_{i=1}^n |\mu_i| \quad (1)$$

انرژی گراف مفهومی است که نخستین بار توسط ایوان گوتمن ارائه شد دارای انگیزشی مربوط به مسائل شیمی است. یعنی، برای گراف‌هایی که در آن‌ها تئوری مداری مولکولی هوکل^۱ اسکلت اتم کربن برخی هیدروکربورهای اشباع شده^۲ را نشان می‌دهد، E به کل انرژی π -الکترون مرتبط می‌شود یا به بیان دقیق‌تر کل انرژی π -الکترون یک ترکیب خطی از E را به دست می‌دهد. گوتمن [۳] بعدها نشان داد که صرف‌نظر از واکنش‌های شیمیایی، معیار انرژی را می‌توان برای تمامی گراف‌ها مورد استفاده قرار داد.

حملات مبتنی بر معیارهای مرکزیت معمولاً در زمره راهبردهای شناخته شده حمله هستند و این معیارهای عمدتاً سعی در تبیین اهمیت هر مؤلفه در شبکه را دارند. برای یک گراف مرکزیت درجه^۳ عبارتست از نسبت تعداد لبه‌های واقعی گره u به ماکزیمم تعداد لبه‌های ممکن متصل به این گره [۴].

1- Hückel molecular orbital theory

2- Conjugated hydrocarbons

3- Degree Centrality

۲-۱-۱ معیارهای استحکام

با وجودی که توپولوژی و ساختار شبکه‌ها معیار مهمی برای درک و شناخت شبکه‌های پیچیده است، به تنهایی برای تبیین و استخراج تعاملات و خواص موجود در آن‌ها که بسیار گسترده و متنوع هستند کفایت نمی‌کند. به همین دلیل شماری از معیارهای آماری بدین منظور توسعه یافته‌اند که هر کدام از آن‌ها در زمینه مختلف و مشخصی موضوعیت، کاربرد و سودمندی دارد. در ادامه ما به اختصار برخی از معیارهای سودمند و مهم جهت سنجش تاب‌آوری و استحکام را که در این مقاله مورد استفاده قرار داده‌ایم معرفی می‌کنیم.

در این مقاله از واریانس‌های معیارهای مرکزیت نیز به این دلیل بهره جسته‌ایم که می‌توانند برای تبیین تعادل و بالانس مرکزیت هر گراف تحت آزمون مورد استفاده قرار بگیرند. در بخش ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی خواهیم دید که گراف‌های بهبود یافته با داشتن ویژگی بالانس در مرکزیت خویش می‌توانند استحکام بیشتری را در برابر حملات سیستماتیک مبتنی بر مرکزیت در قیاس با گراف‌های اصلی به نمایش بگذارند.

اتصال‌پذیری جبری نشان داده شده که می‌تواند در هنگام تحلیل آسیب‌پذیری شبکه اطلاعات سودمند و دقیقی را عرضه کند. گفتیم که کوچک‌ترین دومین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسیان (λ_2) اتصال‌پذیری جبری نام دارد [۶] و اگر فقط و اگر گراف ناهمبند باشد، در این صورت $\lambda_2=0$ خواهد بود و هنگامی که تمامی گره‌ها متصل باشند معادل با کل تعداد رئوس گراف است. بدین ترتیب، معیار اتصال جبری بیانگر اتصال‌پذیری گراف است و مقادیر بزرگ‌تر این معیار معادل با استحکام بیشتر گراف خواهد بود.

معیار بعدی توزیع طیفی وزن دار^۷ است که برای تحلیل توپولوژی اینترنت معرفی شده است [۶].

دیگر معیار طیفی، اتصال‌پذیری طبیعی^۸ است که توسط جان وو^۹ و همکارانش [۷] معرفی شد. نکته جالب آن است

$$C_D(u) = d(u)/(n-1) \quad (2)$$

این معیار بیانگر توانایی هر گره در برقراری ارتباط مستقیم با سایر گره‌ها است. بدین ترتیب هر قدر این معیار بیشتر باشد اهمیت گره مزبور بیشتر خواهد بود.

بینیت یک معیار سنجش مرکزیت یک گره در شبکه است و معمولاً با کسری از کوتاهترین مسیرهای بین زوج گره‌های گذرنده از این گره تعریف می‌شود. برای گراف G

$$C_B(u) = \sum_{s \neq u \neq t \in V} \sigma_{st}(u) / \sigma_{st} \quad (3)$$

به قسمی که σ_{st} تعداد کوتاهترین مسیرها بین زوج گره‌های s و t و نیز $\sigma_{st}(u)$ عبارت از تعداد کوتاهترین مسیرها بین این زوج گره‌ها که از گره u عبور می‌کند.

در متون شبکه‌های پیچیده یکی از معیارهایی که برای بیان میزان اهمیت گره در نظر گرفته می‌شود معیار مرکزیت نزدیکی^۵ است که اهمیت گره مورد نظر را بر اساس نزدیکی‌ای که به سایر گره‌ها دارد در نظر می‌گیرد. در این مقاله معیار نزدیکی فریمن که در واقع نرمال‌شده معیار نزدیکی سابدوسی است مورد استفاده قرار گرفته و به صورت زیر قابل تعریف است [۴].

$$C_C(u) = \sum_{t \in V \setminus u} (d_C(u, t))^{-1} \quad (4)$$

۲-۱-۲ تجزیه و تحلیل استحکام

برای ساخت هر شبکه ارتباطی موفق، جنبه‌های مختلفی از جمله هزینه، امنیت، مقیاس‌پذیری و تحمل‌پذیری اشکال را می‌بایست مدنظر قرار داد. این عوامل برای هر شبکه ارتباطی امری حیاتی محسوب می‌شود [۵]. با افزایش روزافزون شبکه‌ها و استفاده از آن‌ها با اهداف حیاتی، نیاز به استحکام افزایش یافته و به‌ویژه در صورت بروز خرابیها و حملات بدخواهانه^۶ و هدفمند، این مهم بیش از پیش اهمیت پیدا می‌کند.

7- Weighted Spectral Distribution

8- Natural connectivity

9- Jhon Wu

4- Betweenness Centrality

5- Closeness Centrality

6- Malicious

که می‌توان این معیار را برحسب انرژی آزاد هلمهولتز^{۱۰} برای یک شبکه مفروض محاسبه کرد. نشان داده شده که این معیار در قیاس با اتصال‌پذیری جبری می‌تواند به نحو دقیق‌تری تغییرات اتصال‌پذیری را رصد کند.

شکاف طیفی^{۱۱} نیز دیگر معیار مستخرج از طیف گراف است و برابر با اختلاف بین بزرگ‌ترین دو مقدار ویژه ماتریس مجاورت گراف بوده و می‌تواند میزان استحکام شبکه را در برابر تغییرات توپولوژیکی اندازه‌گیری و تحلیل کند. بنابراین، یک شرط لازم برای این‌که شبکه بتواند اکسپندر خوبی باشد آن است که مقدار این شکاف به قدر کافی بزرگ باشد [۶].

معیار بعدی مورد استفاده مقاومت موثر کل گراف^{۱۲} است که اگر در حوزه تحلیل مدارهای الکتریکی به گراف نگاه کنیم می‌توان هر لبه آن را را متناظر با یک مقاومت یک اهمی در نظر گرفت و بدین ترتیب، مقاومت موثر کل گراف عبارت از مجموع مقاومت‌های موثر جفتی بین هر زوج رأس از گراف با فرض برقراری ولتاژی بین آن زوج رأس قابل تعریف است. قدرت این معیار در این حقیقت نهفته است که تمامی مسیرها مورد ملاحظه و توجه قرار می‌گیرند و یکی از کاربردهای مهم آن سنجش و برآورد میزان تاب‌آوری شبکه است [۶].

تیزقدم و گارسیا معیار استحکامی موسوم به بحرانیت شبکه^{۱۳} را پیشنهاد کرده‌اند که مبتنی بر بینیت گام زدن تصادفی است؛ بر طبق تعریف عبارت از تعداد ملاقات‌های گرهی مانند k است که در یک گام زدن تصادفی از رأس دلخواه i شروع شده و در رأس دلخواهی مانند j خاتمه می‌یابد. نشان داده شده که معیار بحرانیت شبکه نیز تابعی از مقادیر ویژه لاپلاسیان گراف است. همچنین نکته جالب توجه این است که معیار بحرانیت شبکه معادل با دو برابر ساختن مقاومت موثر گراف است و از این‌رو هر قدر که اتصال‌پذیری جبری بیشتر شود بحرانیت و به تبع

آن مقاومت موثر کاهش بیشتری یافته و در نتیجه شبکه مستحکم‌تر خواهد شد [۶].

در مقاله حاضر شانزده معیار مهم استحکام محاسبه، بررسی و مقایسه شده است و تلاش بر این بوده تا ناسازگاری موجود ما بین تفسیر برخی از این معیارها روشن گردد. مضافاً، توجه شود که اغلب این معیارها در زمره معیارهای توپولوژیکی‌اند یعنی به شکل و ساختار شبکه وابستگی تام دارند و از این رو به معنای پس‌زمینه یا سرویس مورد ارائه شبکه، ارتباطی ندارند.

با توجه به دلایل فوق، ما معیار پیشنهادی استحکام جریان^{۱۴} را که در [۶] معرفی و استفاده شده برای کار خویش مناسب یافتیم. طبق تعریف، جریان استحکام هر گراف عبارت از نسبت تعداد جریان‌های قابل اعتماد را به تعداد کل جریان‌های موجود در شبکه است [۶]. هر جریان در صورتی قابل اعتماد است که حداقل یکی از مسیرهایش به دلیل خرابی پیوند یا گره، منفصل و پاره نگردد. با داشتن n گره، تعداد کل جریان‌ها برابر با ماکزیمم تعداد جریان‌ها یعنی $n/2(n-1)$ است. این معیار توانایی ارتباط گره‌های شبکه با یکدیگر را نشان می‌دهد. به‌طور خلاصه مفهوم استحکام جریان هر گراف برابر با تعداد مؤلفه‌های موجود در آن گراف به کل تعداد یال‌های ارتباطی در یک گراف کامل است و محدوده آن در بازه $[0, 1]$ قرار دارد. یک به معنای آن است که گراف متصل کامل است یعنی تمام گره‌ها قادر به ارتباط با یکدیگرند و صفر به معنی آن است که n گره ایزوله داریم یعنی هیچ زوج گره ارتباطی در کل شبکه یافت نمی‌شود. یک نکته مهم این است که سنجش جریان استحکام نمی‌تواند بین گراف‌های همبند تمایزی برقرار سازد. برای مثال، جریان استحکام برای هر دو شبکه توری کامل و ستاره یک است. بدین سیاق در [۶] مولفان سه معیار رفتاری استحکام را برای محاسبه مجموع جریان استحکام‌های هر شبکه مفروض در برابر حملات مبتنی بر مرکزیت پیشنهاد داده‌اند:

● SFRD: یعنی مجموع جریان استحکام در برابر حملات

10- Helmholtz free energy
11- Spectral Gap
12- Effective Graph Resistance
13- Network Criticality

14- Robustness flow

مبتنی بر درجه؛

● SFRC: یعنی مجموع جریان استحکام در برابر حملات مبتنی بر نزدیکی؛

● SFRB: یعنی مجموع جریان استحکام در برابر حملات مبتنی بر بینیت.

در بخش نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی نشان خواهیم داد که این معیارها می‌توانند سازگاری مناسبی را در تفسیر، ارزیابی، تحلیل تاب‌آوری و استحکام شبکه‌های مختلف برقرار سازد.

۲-۲ تجزیه و تحلیل ناهمگنی

در این قسمت ما برخی تعاریف پایه و علائمی را که در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱ [۸]: گراف G را منتظم (همگن) گویند اگر و تنها اگر درجه تمامی گره‌های مساوی باشد؛ در غیر این صورت G نامنتظم است.

تعریف ۲ [۸]: هر نگاشتی که عدد حقیقی مانند $irr(G)$ را به گراف G مرتبط سازد، در صورتی می‌تواند به‌عنوان یک معیار ناهمگنی تلقی گردد که هر دو شرط زیر را برآورده سازد.

$$irr(G) = \begin{cases} 0 & \text{if and only if } G \text{ is regular} \\ > 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

در سراسر این مقاله، نماد IM (معیار ناهمگنی) به‌عنوان مجموعه‌ای تعریف می‌شود که هر معیار ناهمگن دیگر می‌تواند عضوی متعلق به این مجموعه باشد.

یادداشت: اگر شاخص ناهمگنی $XEIM$ و ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد، در این صورت $cXEIM$ خواهد بود. علاوه بر این، ترکیب و ضرب دو شاخص ناهمگنی X_1 و X_2 نیز اساساً یک شاخص ناهمگنی دیگر خواهد بود؛ به بیان ریاضی [۹]

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \in IM \\ X_1 \cdot X_2 \in IM \end{cases} \quad (6)$$

۲-۱-۱ معیارهای ناهمگنی

در طی سال‌های گذشته، تمرکز بخشی از پژوهش‌ها با گراف‌ها و شبکه‌های پیچیده مرتبط بوده و بر مبنای معیارهایی قرار گرفته که می‌توانند ناهمگنی نهفته در آن را بهتر بیان کنند. معیارهای متنوعی برای ارزیابی و سنجش میزان ناهمگنی توسط پژوهشگران مختلف پیشنهاد شده است. با این حال خوب است اشاره کنیم که تاکنون بررسی جامعی درباره این معیارها و نیز سازگاری/عدم‌سازگاری و نیز مشابهت آن‌ها با یکدیگر صورت نگرفته است. بررسی این امر به خودی خود یک پژوهش مستقل و ارزشمندی است که مطلوب است به‌صورت جامع و جداگانه به آن پرداخته شود. بنابراین در این بخش به اختصار، به ۵ شاخص ناهمگنی از مهم‌ترین آن‌ها اشاره خواهیم کرد. اما پیش از هر چیزی لازم است اشاره کنیم که به‌طور کلی معیارهای ناهمگنی در ادبیات موضوع را می‌توان در سه دسته کلی زیر طبقه‌بندی کرد.

- کلاس شاخص‌های ناهمگنی^{۱۶} مبتنی بر درجه^{۱۷} (VDB)
- کلاس شاخص‌های ناهمگنی مربوط به طیف انرژی
- کلاس شاخص‌های ناهمگنی مبتنی بر نظریه اطلاعات شبکه

برخی از مهم‌ترین شاخص‌های ناهمگنی مبتنی بر درجه (VDB) عبارتند از شاخص هارمونیک، شاخص مجموع اتصال‌پذیری، شاخص اتصال‌پذیری پیوند اتمی، شاخص مجموع وارون، شاخص هندسی-حسابی، شاخص ابرزاگرب، شاخص انحراف متقارن درجه، شاخص رندیچ و شاخص رندیچ هارمونیک [۸].

استرادا [۱۰] یک شاخص مبتنی بر درجه، که در واقع یک تحلیل محلی برای تبیین ناهمگن بودن نسبی مرتبط با یک یال منفرد در گراف‌ها است، پیشنهاد کرده است که به‌عنوان اولین شاخص ناهمگنی به معرفی آن می‌پردازیم. این شاخص ناهمگنی به فرم رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$\rho'(G) = \sum_{(u,v) \in E} (d_u^{-1/2} - d_v^{-1/2})^2 \quad (7)$$

16- Heterogeneity index
17- vertex degree based

15- Irregularity Measure

پیشنهاد استرادا این بود که شاخص‌های نرمال‌شده ناهمگنی شبکه‌ها بایستی در بازه [۰,۱] قرار بگیرند به قسمی که صفر متناظر با گراف‌های منتظم و یک متناظر با گراف ستاره باشد. از سویی در گراف ستاره، رأس مرکزی دارای درجه $\sqrt{n-1}$ و تمامی دیگر رئوس دارای درجه یک هستند، در نتیجه می‌توان بر اساس تحلیل فوق کران‌های بالا و پایینی را برای شاخص ناهمگنی به دست آورد و شاخص ناهمگنی نرمال‌شده رابطه (۸) را تعریف کرد.

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho(G) = \rho'(G)/(n - 2\sqrt{n-1}) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} (1/d_u + 1/d_v - 2\sqrt{d_u d_v}) / (n - 2\sqrt{n-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

استرادا [۱۰] شاخص پیشنهادی‌اش را با الهام از شاخص رندیچ^{۱۸} موسوم به $R=R(G)$ ارائه داده است. شاخص رندیچ به صورت $R = R(G) = \sum_{(u,v) \in E} 1/\sqrt{d_u d_v}$ تعریف می‌شود و تعریف شاخص استرادا به شکل $\rho'(G) = n - 2R$ است [۱۰].

در یک کار پژوهشی دیگر، استرادا-استرادا [۱۱] یک شاخص ناهمگنی موسوم به مجموع فواصل^{۱۹} را پیشنهاد کرده‌اند که در این مقاله به‌عنوان دومین شاخص ناهمگنی به آن پرداخته می‌شود. این نویسندگان با استفاده از مدل اجماع^{۲۰} [۱۲] و انتخاب پارامتر $\alpha = -1/2$ ، یک معیار ناهمگنی را پیشنهاد کردن و نشان داده‌اند که معیار آن‌ها تحت کنترل و تعادل بخشی به تکامل فرآیند اجماع، می‌تواند کیفیتی مشابه با معیار ناهمگنی درجات رئوس داشته باشد. دلیل نام‌گذاری این معیار هم این بوده که توزیع مجموع فاصله در یک شبکه، معادل با توزیع درجه‌گره‌ها در نظر گرفته می‌شود. خوب است به این نکته نیز اشاره کنیم که انتخاب تابع فاصله به صورت $f(d) = d^{-1/2}$ در معیار ناهمگنی پیشنهادی این نویسندگان [۱۱] اساساً به این دلیل بوده که چنین تابعی امکان اندازه‌گیری اختلاف درجه را هم از منظر کمیت و هم از منظر اندازه فراهم می‌کند. همچنین،

تابع f را می‌توان به صورت تابعی از فاصله و به شکل $f = f(s_i) = s_i^\alpha$ در نظر گرفت که s_i بیانگر وضعیت^{۲۱} یا مجموع فاصله یک گره از سایر گره‌ها است. چنانچه پارامتر $\alpha=1$ باشد به شاخص وینر (سیگما)^{۲۲} و مرکزیت نزدیکی^{۲۳} و به‌ازای پارامتر $\alpha=-1/2$ به شاخص بالابان^{۲۴} دست خواهیم یافت.

از سویی دیگر، معیار سومی تحت عنوان واریانس درجه نرمال‌شده به‌عنوان یک معیار جهت سنجش ناهمگنی توسط اسمیت و همکارش [۱۴] پیشنهاد گردیده است. این مولفین ادعا کرده‌اند که معیار پیشنهادی آن‌ها نسبت به مرتبه و چگالی گراف‌ها به شکل ناریب^{۲۵} عمل می‌کند. به نظر این نویسندگان، مشکل معیار ناهمگنی استرادا [۱۰] این است که برای گراف‌های نیمه کامل^{۲۶} که حاوی گره‌های ایزوله است، منجر به خطای تقسیم بر صفر می‌شود. افزون براین، عیب دیگر معیار استرادا نیز این است که به مرتبه و چگالی شبکه‌ها وابستگی دارد و از این جهت اریب عمل می‌کند. به همین دلیل، انگیزش نویسندگان [۱۴] این بوده است که هر معیار ناهمگنی (IM) بایستی قابل اعمال به طیف وسیعی از شبکه‌ها باشد و به اندازه و چگالی آن‌ها اریب نباشد. این مولفین همچنین نشان داده‌اند که معیار ناهمگنی واریانس درجه نرمال‌شده برای یک گراف و مکمل آن نتایج مشابهی را می‌دهد.

این سه شاخص ناهمگنی که به اختصار به مرور آن‌ها پرداختیم جز معیارهای ناهمگنی مبتنی بر درجه (VDB) هستند و عمدتاً از مشکل ناسازگاری یا تضاد با یکدیگر نیز رنج می‌برند. در ادامه به بیان چهارمین شاخص ناهمگنی پرداخته می‌شود که این معیار جزء معیارهای مربوط به طیف انرژی شبکه است.

صفایی و همکارانش [۱۵] یک معیار کارآمد نرمال را برای تبیین خواص ناهمگنی نهفته در ساختار گراف‌ها

21- Status
22- Wiener (sigma) index
23- Closeness
24- Balaban index
25- Unbiased
26- Quasi complete

18- Randić
19- Distance-sum heterogeneity
20- Concensus

۳-۱- گراف هانوی^{۲۷}

در این بخش، نگاه مختصری به گراف‌های هانوی و ویژگی‌های مهم آن‌ها خواهیم داشت و با جزئیات روش ساخت آن‌ها آشنا خواهیم شد. برجی از پازل هانوی مشتمل بر n دیسک و $3+m$ میله است، $n, m \in \mathbb{Z}^+$ گراف هانوی متناظر H_m^n بیانگر تمامی حالات عادی^{۲۸} جابجایی‌های مجاز از پازل هانوی متناظر توسط رؤس و لبه‌ها است. یک حالت در پازل عادی نام دارد هرگاه در آن دیسک‌ها بین میله‌ها طوری توزیع شوند که قرارگرفتن دیسک‌ها بر روی یک میله به ترتیب نزولی اندازه آن‌ها از پایین به بالا باشد. همچنین یک حالت کامل^{۲۹} نام دارد هرگاه عادی باشد و در آن تمامی دیسک‌ها بر روی یک میله قرار داشته باشند [۱۷].

میله‌ها از چپ به راست به صورت $0, 1, \dots, 2+m$ برچسب‌گذاری می‌شوند و دیسک $i, i=1, 2, \dots, n$ بیانگر اندازه دیسک یا شعاع آن است. اگر x_i بیانگر میله دیسک i باشد، در این صورت برای هر وضعیت عادی در برج هانوی با n دیسک و $3+m$ میله می‌توان به شکل یکتایی n تایی (x_1, x_2, \dots, x_n) را تعریف کرد که به ازای هر $i \in \{0, 1, \dots, 2+m\}$ این n -تایی‌ها مجموعه رؤس $V(G)$ گراف هانوی را شکل می‌دهند. بدین ترتیب تعریف نرمال گراف هانوی به صورت رابطه (۹) است [۱۸].

$$V(H_m^n) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, 2+m\}\} \quad (9)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Rightarrow |\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$$

بدین ترتیب، وقتی $n > 0$ باشد، گراف هانوی H_m^n دارای $(3+m)^n$ رأس است. مورد $n=0$ (گراف فاقد دیسک)، گراف تهی نام دارد.

یک لبه در گراف هانوی بیانگر جابجایی مجاز یک دیسک است طوری که دو رأس مجاور یکدیگر خواهند بود هرگاه حالت‌های عادی متناظر بتوانند از دیگری و از طریق یک جابجایی مجاز دقیقاً یک دیسک حاصل شوند. بایستی توجه داشت که رؤس مجاور تنها در یک بیت از

27- Hanoi graph
28- Regular state
29- Perfect state

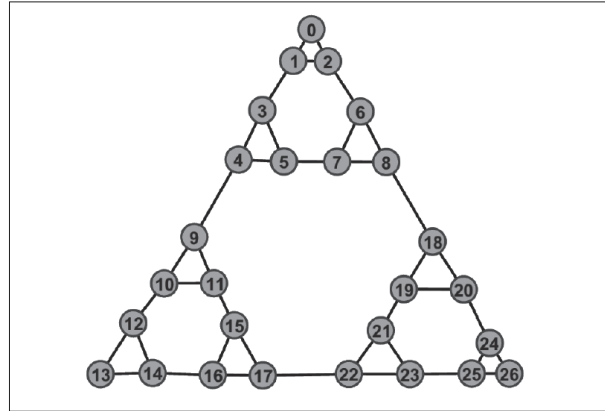
و مقایسه و رده‌بندی شبکه‌های پیچیده ارائه کرده‌اند که به‌عوض اتکاء به درجه گراف (VDB)، بر نظریه طیفی گراف-یعنی اختلاف بین انرژی و انرژی لاپلاسیان مستخرج از شبکه‌های تحت بررسی- اتکاء دارد. مولفین نشان داده‌اند که معیار پیشنهادی آن‌ها برای گراف‌های منتظم و گراف‌های شبه ستاره، به ترتیب، از کران پایین صفر و کران بالای یک نیز برخوردار است و حتی هنگامی که گراف‌ها غیرهم‌ریخت هستند، مقادیر ناصفر را بازمی‌گرداند و قادر است تا با دقت و صحت خوبی و در عین حال با پیچیدگی محاسباتی ناچیز، اختلافات توپولوژیکی ساختاری را تبیین کند. معیار پیشنهادی آن‌ها در دسته دوم از طبقه‌بندی معیارهای ناهمگنی قرار می‌گیرد.

در مقاله دیگری صفایی و همکارانش [۱۶] با ارائه یک روش جدید و کارآمد مبتنی بر انتروپی جهت کمی‌سازی خواص ناهمگنی ساختاری گراف‌ها، اندازه‌گیری پیچیدگی ساختاری، رده‌بندی و مقایسه گراف‌ها و شبکه‌های پیچیده پرداخته‌اند که در این مقاله به‌عنوان پنجمین شاخص ناهمگنی اشاره می‌کنیم. همچنین مولفین در پژوهش‌های خود نشان دادند که معیارهایی مانند انتروپی شانون، انتروپی ون‌نویمن (کوانتومی) و انتروپی‌های تعمیم یافته گراف، چگونه می‌توانند برای ارزیابی و سنجش ناهمگنی در گراف‌ها و شبکه‌های پیچیده مورد استفاده واقع شوند. برای انجام چنین کاری، برخی نتایجی را که از تئوری طیفی گراف حاصل شده و با ساخت ماتریس‌های مستخرج از گراف مرتبط است را مورد استفاده قرار داده‌اند. در نهایت نشان دادند که از این شاخص‌های ناهمگنی مبتنی بر انتروپی‌های گراف چگونه می‌توان بهره جست و سودمندی و کارآمدی هر یک از این معیارهای پیچیدگی را بر روی هر دو شبکه مصنوعی و واقعی نمایش داده‌اند.

۳- معرفی شبکه‌های شبه سرپینسکی

در این بخش به معرفی شبکه‌های پیچیده شبه

سرپینسکی می‌پردازیم.



شکل ۱: گراف هانوی H_1^2

H_p^n نشان داده است که از بازی معروف برج‌های هانوی (TH) با $p = 2$ میخ و n دیسک گرفته شده است. در بخش قبل با مفهوم گراف هانوی آشنا شدیم اما تعداد میخ‌ها را ثابت در نظر گرفته بودیم. اگر تعداد میخ‌ها را به صورت دنباله $P = \{0, \dots, p-1\}$ در نظر بگیریم آنگاه رابطه تعداد رئوس گراف هانوی به فرم (۱۰) تعریف خواهد شد.

$$V(H_p^n) = p^n \quad (10)$$

با افزایش تعداد میخ‌ها همبندی گراف نیز تغییر خواهد کرد و به گراف‌های جدیدی دست می‌یابیم که به آن‌ها تعمیم مسئله برج‌های هانوی می‌گویند.

در مرجع [۲۱]، کلوزار و ملیتینویچ نوعی از این گراف‌ها را معرفی کردند و اسم آن را برج هانوی سویچینگ یا در حال تغییر (STH) برای p میخ و n دیسک گذاشتند. این گراف‌ها را با S_p^n نشان می‌دهند که در این پژوهش همان گراف سرپینسکی نامیده می‌شود. در گراف سرپینسکی زمانی یالی بر قرار می‌شود که یک حرکت در STH انجام شود. یعنی دیسکی از میخ a به میخ j منتقل شود.

تعریف ۳: برای $p \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$ گراف سرپینسکی S_p^n به شکل رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$V(S_p^n) = p^n$$

$$E(S_p^n) = \{ \{s, i, j, d^{-1}\}, \{s, j, i, d^{-1}\} \mid i, j \in P, i \neq j, d \in [n]; s \in p^{n-d} \} \quad (11)$$

با توجه به تعریف تعداد رئوس و یال‌های این گراف می‌توان حالت‌های مختلف را بررسی کرد.

• در موارد بدیهی، $n=0$ و $p=1$ حالیست که گراف هیچ رأسی و یالی ندارد. $S_p^n \cong k_1 \cong S_1^n$ که k_p نشان‌دهنده گراف کامل شده از مرتبه p است.

• اولین حالت جالب برای این گراف‌ها زمانیست که $p=2$ باشد، که در آن $S_2^n = P_{(2^n)} S_2^n = P_{(2^n)}$ گراف از مرتبه 2^n است.

• اولین نتیجه غیر بدیهی در مورد گراف‌های سرپینسکی $S_2^n = H_2^n$ است که برای هر تعداد n تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، هر دو گراف، تقریباً تعداد رئوس برابری

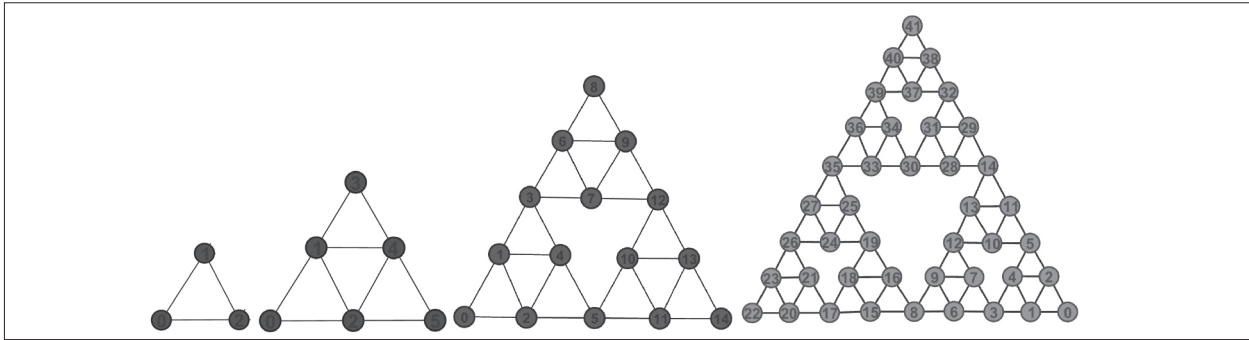
n -تایی هایشان با یکدیگر تفاوت دارند.

نشان داده شده که هر گراف هانوی هامیلتونی است و همچنین ثابت شده است که تنها گراف‌های هانوی که مسطح‌اند عبارتند از H_2^n (n دیسک و $3+m$ میله)، H_1^1 (۱ دیسک و ۳ میله) و H_2^2 (۲ دیسک و ۴ میله) [۱۹]. در شکل (۱) گراف هانوی H_1^2 ترسیم شده است.

۳-۲ گراف‌های سرپینسکی

گراف‌های سرپینسکی در چند دهه گذشته تحت تاثیر نام‌ها و در اشکال مختلف در زمینه‌های متفاوت ریاضیات و کاربردهای آن پدیدار شده است. به‌طور شفاف طبقه‌بندی مربوط به این گراف‌ها و مهم‌ترین خواص این‌گونه گراف‌ها را نیز به‌طور خلاصه مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف‌ها که ساختار آن‌ها به‌صورت تقریبی همانند مثلث معروف سرپینسکی است، در چند دهه گذشته به شدت مورد بررسی قرار گرفته است. علاقه به این گراف‌ها از بسیاری منابع مختلف مانند بازی‌های چینی یا برج هانوی، همبندی، مطالعه اتصالات شبکه‌ها و موارد دیگری نیز نشئت می‌گیرد. بنابراین تعجب‌آور نیست که نام‌های مختلفی برای یک گراف و یا همین نام را برای گراف‌های مختلف به‌کار گرفته شود.

در مرجع [۲۰] شباهت بین گراف‌های هانوی و دنباله‌ای از گراف‌هایی که به‌صورت تقریبی به مثلث سرپینسکی معروف‌اند، مطرح شده است. در آنجا گراف هانوی را با



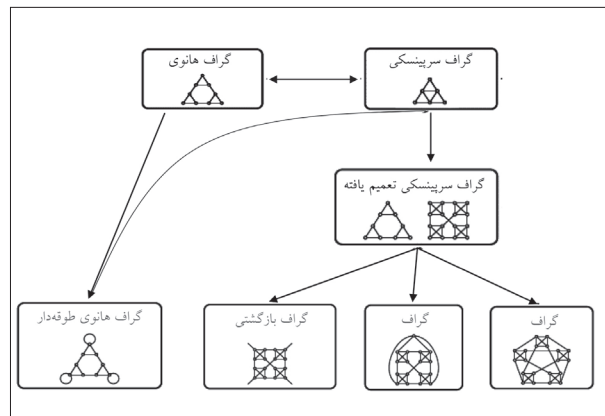
شکل ۲: مراحل الگوریتم رشد گراف سرپینسکی gasket

می‌شود و آن‌ها را گراف‌های تعمیم یافته سرپینسکی می‌نامیم.

همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، چند راه برای سازمان‌دهی گراف‌های سرپینسکی به گراف‌های $S_p^n, S_p^n, S_p^n, S_p^n$ وجود دارد. دیگر خانواده‌های مشابه این گراف‌ها، شبکه‌های بازگشتی WK و گراف‌های Schreier (برای $p=3$) هستند که به ترتیب دارای یال‌های باز و یا حلقه‌های (طوقه‌های) اضافی هستند. همه این خانواده‌ها در دسته گراف‌های شبه سرپینسکی قرار خواهند گرفت. این خانواده‌ها مشابه گراف‌های سرپینسکی هستند، اما متناظر با آن‌ها نیستند و همچنین می‌توانند تنظیمات و ویژگی‌های مربوط به گراف‌های سرپینسکی را نیز باهم مورد مقایسه قرار داد [۲۲]. بنابراین، در این مقاله به بررسی گراف‌های مثلث سرپینسکی (تعمیم یافته شده) و گراف‌های S_p^n, S_p^n می‌پردازیم.

۳-۲-۱-۱ گراف‌های مثلث سرپینسکی (تعمیم یافته شده)^{۳۱}
گراف سرپینسکی را در ابتدای این بخش معرفی

کردیم و با ساختار و ویژگی‌های آن آشنا شدیم. برای تعمیم گراف‌های مثلث سرپینسکی S_p^n پارامترهای n و p دستخوش تغییر می‌شوند. با تغییر پارامتر n مرتبه گراف تعیین می‌شود و تغییرات در پارامتر p منجر به تغییر شکل گراف می‌شود. به عنوان مثال اگر پارامتر $p=3$ باشد آنگاه در گراف مثلث‌ها به چشم می‌آید اگر $p=4$ باشد آنگاه در گراف مربع‌ها دیده می‌شود در نتیجه با تغییر پارامتر p ، تعداد اضلاع شکل‌ها تعیین می‌گردد. الگوریتم



شکل ۳: طبقه‌بندی خانواده گراف‌های سرپینسکی

دارند که می‌تواند آن‌ها را با همان ظاهری یکسان اما با برچسب‌گذاری متفاوت نشان داد. این تفاوت اجازه یک رویکرد جایگزینی برای برج هائوی را می‌دهد.

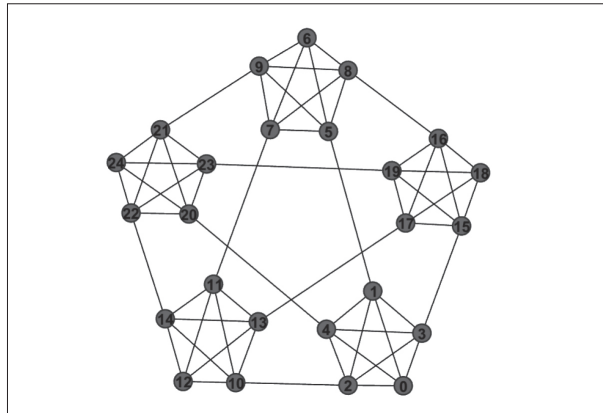
نکته قابل توجه و مهمی وجود دارد که برخی از پژوهشگران به گراف سرپینسکی S_p^n نام دیگری را می‌دهند. آن‌ها به این گراف، گراف سرپینسکی (gasket) گویند. الگوریتم رشد این شبکه را در شکل (۲) نشان داده شده است [۲۲].

۳-۲-۳ گراف‌های تعمیم یافته سرپینسکی

در این بخش مشخصاتی از گراف‌های سرپینسکی را ارائه می‌دهیم که این گراف‌ها مشتق شده یا منجر به ایجاد مثلث سرپینسکی به عنوان یکی از محبوب‌ترین این گراف‌ها است. طبقه‌بندی اصلی (طبقه‌بندی) مربوط به گراف‌های سرپینسکی در شکل (۳) نشان داده شده است [۲۲].

این گراف‌ها با ناماد $S[n, k]$ نشان داده می‌شوند که در حال حاضر با $\bar{S}_k^n = \bar{S}_p^n$ (P جایگزین k شده است) نمایش داده

31- Sierpinski Triangle Graph (ST(n,p))



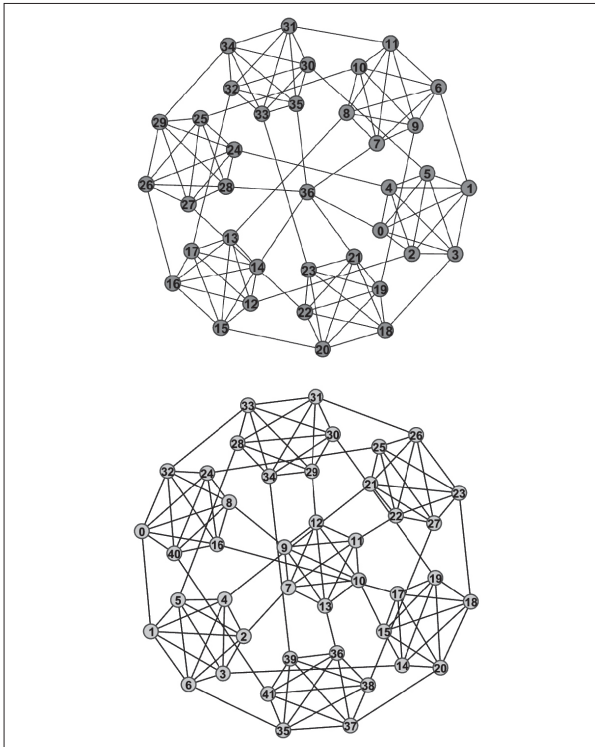
شکل ۴: گراف سرپینسکی S_5^2

رشد گراف‌های مثلث سرپینسکی و تعمیم‌های آن‌ها به‌طور کامل پیاده‌سازی شده است و برای درک بهتر این گراف در شکل (۴) به‌عنوان نمونه گراف S_5^2 به نمایش گذاشته می‌شود [۲۲].

۲-۱-۲-۳ گراف سرپینسکی $(+S \& ++S)$

برای $p, n \in \mathbb{N}_+$ تمام رئوس غیر انتهایی از گراف‌های سرپینسکی S_p^n دارای درجه P می‌باشند و رئوس انتهایی نیز از درجه $P-1$ هستند [۲۲]. بنابراین گراف‌های سرپینسکی گراف‌های تقریباً منظمی (همگنی) هستند. این نظم نیز انگیزه‌ای برای تعریف دو خانواده جدید از گراف‌های شبه سرپینسکی ایجاد می‌کند. از آنجایی که P رأس از درجه $P-1$ در گراف S_p^n وجود دارد بنابراین دو راه طبیعی برای نظم دادن به این گراف‌ها وجود دارد:

یا یک رأس دیگر به نام w را به گراف S_p^n اضافه کنیم و آن را به کل رئوس انتهایی آن نیز متصل کنیم که گراف سرپینسکی $(+S)$ نامیده می‌شود یا یک کپی دیگر از S_p^{n-1} را ایجاد می‌کنیم و سپس تمامی رئوس انتهایی S_p^n را به رئوس انتهایی S_p^{n-1} به ترتیب متصل می‌کنیم که به آن گراف سرپینسکی $(++S)$ گویند. برای درک بهتر این دو ساختار، شکل (۵) برای مثال $n=2$ و $p=6$ نشان داده شده است. با اضافه کردن رأس w (گره شماره ۳۶ در شکل (۵) سمت چپ) این امکان برایمان فراهم می‌شود که به خانواده بیشتری از گراف‌های با رئوس خاص $+S_p^n$ دسترسی پیدا کنیم. اما در گراف $+S_p^n + S_p^n$ ، (شکل (۵) سمت



شکل ۵: گراف سرپینسکی $+S_p^n$ (شکل بالا) و $+S_p^n++$ (شکل پایین)

راست) همان‌طور که ملاحظه می‌شود به جای اضافه شدن یک گره جدید به گراف، یک ۶ ضلعی حاصل مرتبه قبلی گراف به شبکه اضافه شده است.

همچنین در رابطه (۱۲) تعداد رئوس و یال‌های گراف $(+S)$ تعریف می‌شود [۲۲]:

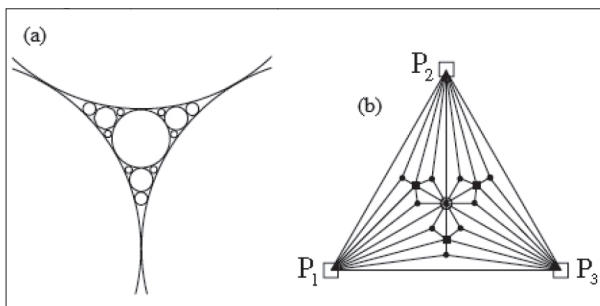
$$\begin{aligned} V(+S_p^n) &= P^n \cup \{w\}, \\ E(+S_p^n) &= E(S_p^n) \cup \{(w, i^n) | i \in P\} \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه (۱۳) تعداد رئوس و یال‌های گراف $(++S)$ تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\begin{aligned} V(++S_p^n) &= P^n \cup \{ps | s \in P^{n-1}\}, \\ E(++S_p^n) &= E(S_p^n) \cup \{(ps, pt) | \{s, t\} \in \\ & \left(P^{n-1} \right) \cup \{(pi^{n-1}, i^n) | i \in P\} \end{aligned} \quad (13)$$

۳-۳ گراف آپولونین^{۳۲}

این شبکه به‌صورت همزمان دارای ویژگی‌های مستقل از مقیاس، دنیای کوچک، اقلیدوسی و فضای پر است. مطالعه شبکه‌ها برای درک جریان اطلاعات و انتقال اطلاعات در سیستم‌های با درجه بالا که مقیاس آزاد هستند، در طول



شکل ۶: مماس کردن دایره‌ها به یکدیگر (چپ)، شبکه حاصل از مماس کردن این دایره‌ها (راست) [۲۳]

شکل (۶) هم‌بندی شبکه آپولونین را نشان می‌دهد. همان‌طور که قبلاً بیان شد این گراف می‌تواند به صورت تصادفی نیز باشد. یعنی مثل گراف ناسازگاری، به جای ایجاد ۳ دایره در فضاهای خالی، یک دایره در یک فضای خالی به صورت تصادفی ایجاد می‌شود. از گراف تصادفی آپولونین در شبکه مغز استفاده می‌شود. این شبکه بافت‌های محیط متخلخل (محیط‌های دارای خلل و فرج‌دار) مغز را می‌تواند به نمایش بگذارد. پس از آشنایی با ساختار این شبکه به بیان رابطه (۱۴) تعداد رئوس این شبکه می‌پردازیم [۲۴].

$$N_n = 2 + (2^{n+1} - 1) / 2 \quad (14)$$

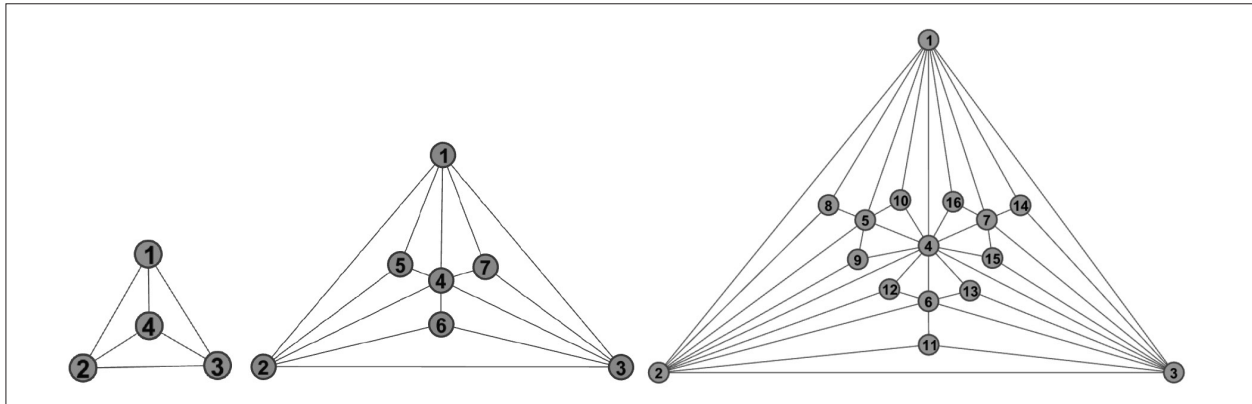
برای درک بهتر هم‌بندی این شبکه، شکل (۷) الگوریتم رشد شبکه آپولونین را نشان می‌دهد.

۴. نتایج شبیه‌سازی

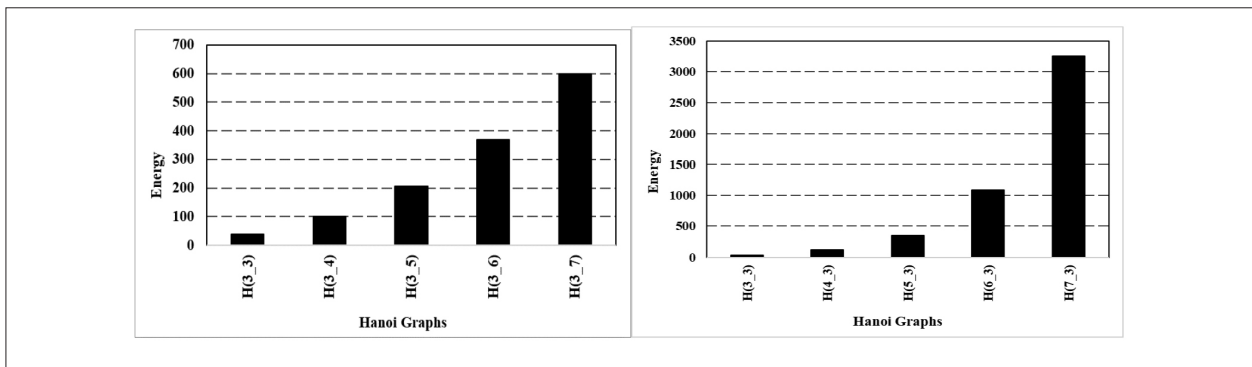
در این مقاله فرض بر این است که حملات و خرابی‌ها متوالیاً اتفاق می‌افتند و بدین ترتیب تمامی شبیه‌سازی‌ها با توجه به این فرض انجام پذیرفته است. معیار انرژی گراف که برابر با مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف است، معیاری است که در این مقاله به کمک آن نشان می‌دهیم که استحکام شبکه، صرف نظر از نوع راهبرد حمله، به خوبی قابل سنجش و اندازه‌گیری است. بدین سیاق، تلاش داریم نشان دهیم که انرژی هر گراف معیار مناسبی برای تخمین استحکام آن گراف است [۹]. نمودارهای شکل (۸)، مقادیر انرژی گراف‌های هانوی

سال‌های گذشته مفید بوده است. بسیاری از انواع این شبکه، برای تمایز و روشن کردن اثرات مختلف مربوط به خوشه‌بندی‌ها، گسترش بیماری‌های همه‌گیر، برنامه‌ریزی منطقی برای پیش‌بینی زلزله و فعالیت عصبی پیشنهاد شده است. در میان بسیاری از مدل‌ها، توجه زیادی به مطالعه شبکه‌های بدون مقیاس شده است، یعنی شبکه‌هایی که توزیع درجه آن‌ها قانون توانی $p(k) \propto k^{-\gamma}$ را نشان می‌دهند. در این شبکه‌ها، k نشان‌دهنده تعداد اتصالات یک گره (درجه گره) می‌باشد. یک مثال از این شبکه که در دنیای واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد شبکه برق می‌باشد که جریان برق فعال در این شبکه منتقل می‌شود. همچنین از این شبکه در مکان‌هایی که تراکم بالایی دارند استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مصالح بتنی ساختمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این گروه جدید از شبکه‌ها که به نام شبکه‌های آپولونین (ANS) نامیده می‌شوند، می‌توانند به صورت قطعی یا تصادفی باشند. علاوه بر این، اثر دنیای کوچک را به نمایش بگذارند و می‌توانند در یک شبکه اقلیدسی استفاده شوند [۲۳].

این شبکه برای اولین بار توسط پژوهشگری به نام آپولونیوس (ریاضیدان یونان باستان) معرفی شد. او در ابتدا ۳ دایره را باهم مماس کرد و مراکز دایره‌ها را به هم متصل کرد که به گراف مثلث شکلی رسید. سپس از مماس این ۳ دایره یک فضای خالی بینشان به وجود آمد. یک دایره درون فضای خالی به وجود آمده کشید و مرکز آن دایره را نیز به مراکز ۳ دایره دیگر متصل کرد. این گراف به دست آمده را، مرحله نخست شبکه آپولونین می‌نامند. در مراحل بعدی درون ۳ فضای خالی ایجاد می‌شود که با کشیدن دایره درون آن‌ها و متصل کردن مراکز دایره‌ها به هم، به گراف‌های جدید دست خواهیم یافت. با تکرار این الگوریتم، گراف آپولونین رشد یافته و تعداد گره‌ها و ارتباطات آنها افزایش می‌یابد. اگر n را مرتبه این گراف در نظر بگیریم، n را می‌توان به صورت نامحدود افزایش داد ($n = 0, 1, 2, \dots$). برای درک بهتر توضیحات داده شده



شکل ۷: مراحل الگوریتم رشد گراف آپولونین



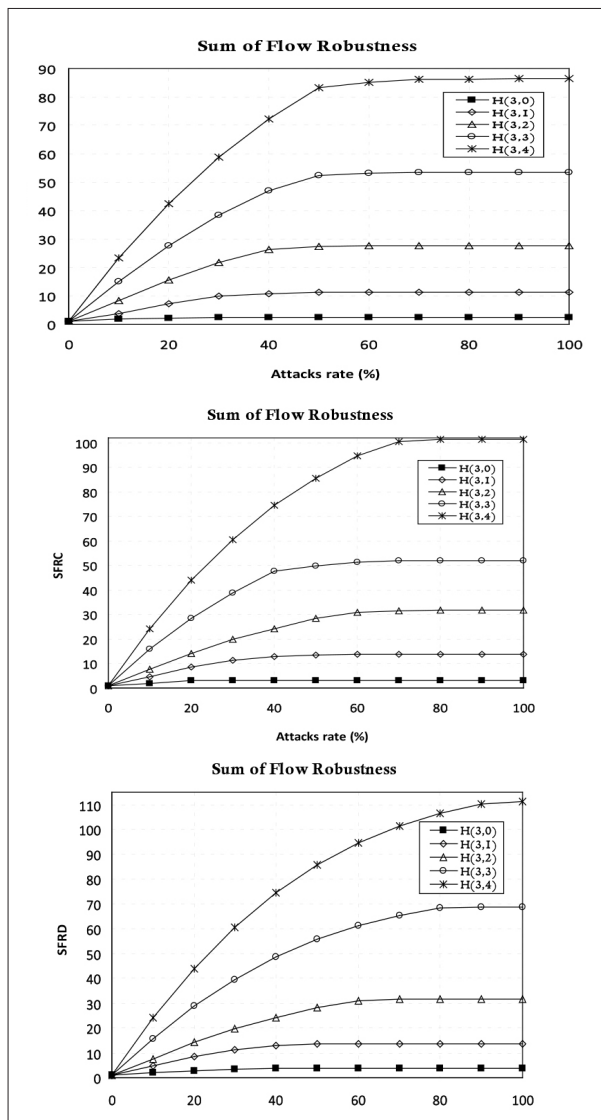
شکل ۸: مقادیر انرژی گراف‌های هانوی در دو پیکربندی مختلف

دیسک‌ها، با گراف‌هایی غیرمسطح همراه با افزایش تعداد بیشتر گره‌ها و یال‌ها مواجه خواهیم بود که این مورد به افزایش انرژی گراف و در نتیجه استحکام آن کمک شایانی خواهد کرد. برای گراف‌های سرپینسکی S_p^n نیز نتایج مشابهی حاصل شده است. بنابراین با افزایش پارامترهای n و p انرژی کل شبکه‌های سرپینسکی نیز افزایش می‌یابد. به‌منظور ارائه یک ارزیابی سازگار از استحکام گراف‌های هانوی، شبکه‌های تحت آزمون را مجدداً مورد حملات هدفمند مبتنی بر مرکزیت درجه، نزدیکی و بینیت قرار داده و سپس مجموع جریان‌های استحکام را برای هر شبکه اندازه‌گیری کرده‌ایم. هر قدر میزان مجموع جریان استحکام در برابر حمله مربوطه از نرخ افزایشی بیشتری برخوردار باشد، گراف تحت آزمون از میزان استحکام بالاتری برخوردار خواهد بود. این امر ریشه در تعریف SRF دارد.

در نمودارهای شکل (۹) مقادیر معیار مجموع جریان

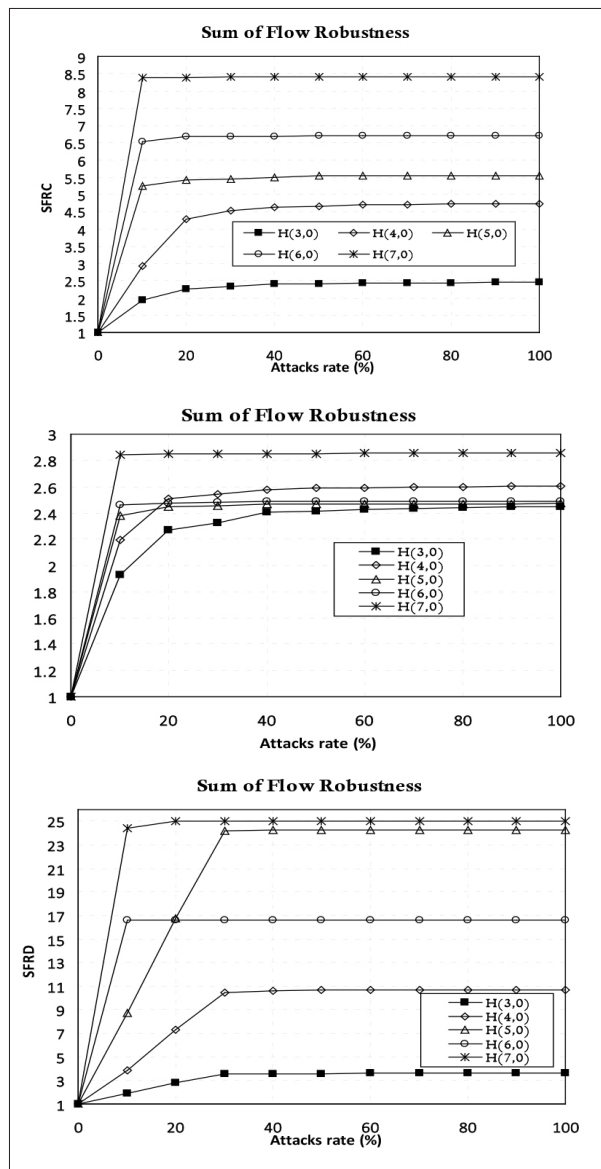
با دو پیکربندی مختلف نمایش داده شده است. در شکل (۸) سمت راست، تعداد میله‌ها برابر با مقدار ثابت ۳ فرض شده و تعداد دیسک‌ها از ۳ تا ۷ تغییر کرده است و پیکربندی دوم شکل (۸) سمت چپ، این فرایند معکوس شده و تعداد میله‌ها ثابت و برابر ۳ و تعداد دیسک‌ها به‌صورت متغیر و از ۳ تا ۷ در نظر گرفته شده است.

از مقایسه این دو نمودار مشخص می‌شود که با افزایش تعداد دیسک‌ها (میله‌ها) و با ثابت نگاه‌داشتن تعداد میله‌ها (دیسک‌ها)، انرژی گراف‌ها در هر دو حالت افزایش می‌یابد. نکته جالب توجه این است که تاثیر این افزایش هنگامی که تعداد میله‌ها را ثابت و تعداد دیسک‌ها را متغیر فرض می‌کنیم بیشتر از حالتی خواهد شد که تعداد دیسک‌ها را ثابت و تعداد میله‌ها را تغییر می‌دهیم. این پدیده به دلیل آن است که در هنگام ثابت بودن تعداد میله‌ها، گراف‌های هانوی ایجاد شده همگی مسطح هستند. لیکن در پیکربندی دوم یعنی متغیر بودن تعداد میله‌ها و ثابت نگاه‌داشتن تعداد



شکل ۱۰: به ترتیب از بالا به پایین مجموع جریان استحکام برحسب تعداد حملات سیستماتیک مبتنی بر مرکزیت درجه (SFRD)، بینیت (SFRB) و نزدیکی (SFRC) در انواع مختلف گراف‌های هانوی و با فرض ثابت بودن تعداد دیسک‌ها برابر با ۳ و متغیر بودن تعداد میله‌ها از ۳ تا ۷

در شکل (۱۰) این موضوع برای پیکربندی دوم یعنی ثابت نگاه داشتن تعداد دیسک‌ها و تغییر تعداد میله‌ها نیز صادق است. نکته قابل توجه این است که تغییرات مجموع جریان استحکام در پیکربندی دوم بیشتر است چرا که در این پیکربندی شکل (۱۰) فرم گراف‌ها کلاً عوض شده و از حالت مثلثی شکل خارج می‌شوند. همچنین می‌توان از نمودارهای شکل‌های (۹ و ۱۰) نتیجه گرفت که در هر دو پیکربندی، استحکام انواع مختلف گراف‌های هانوی در برابر حملات سیستماتیک مبتنی بر مرکزیت درجه گرہ‌ها



شکل ۹: به ترتیب از بالا به پایین مجموع جریان استحکام برحسب تعداد حملات سیستماتیک مبتنی بر مرکزیت درجه (SFRD)، بینیت (SFRB) و نزدیکی (SFRC) در انواع مختلف گراف‌های هانوی و با فرض ثابت بودن تعداد میله‌ها برابر با ۳ و متغیر بودن تعداد دیسک‌ها از ۳ تا ۷

استحکام برای سناریوی اول یعنی ثابت بودن تعداد میله‌ها و تغییر تعداد دیسک‌ها بررسی شده است. با توجه به این نمودارها می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش تعداد دیسک‌ها گراف به استحکام بیشتری دست پیدا می‌کند چرا که مقادیر SFRC، SFRB و SFRD افزایش یافته که این امر معنای بیشتر شدن مجموع استحکام‌های جریان در این نوع گراف‌ها در طی حملات هدفمند بینیت، نزدیکی و درجه و در نتیجه برخورداری از استحکام بیشتر گراف

از حملات هدفمند مبتنی بر سایر مرکزیت‌ها یعنی بینیت و نزدیکی بیشتر است چرا که دارای مقادیر SFRها بیشتری در مقایسه با آنها هستند.

برای یک جمع‌بندی جامع و کامل از میزان استحکام مدل‌های مختلف شبکه‌های هانوی، مقادیر عددی معیارهای مختلف استحکام (شرح این معیارها در بخش ۲-۱ ارائه شده است) را همراه با مقادیر مجموع استحکام جریان‌ها (یعنی SFRC، SFRB و SFRD) برای هر یک از مدل‌های گراف‌های هانوی برای دو پیکربندی ثابت بودن تعداد میله‌ها و نیز ثابت بودن تعداد دیسک‌ها در جداول ۱ و ۲ فهرست شده است. با کمک این مقادیر و نیز مقادیر هر یک از سه معیار جریان استحکام می‌توان با صحت و دقت بیشتری میزان استحکام و تاب‌آوری گراف‌های مختلف هانوی را در هر یک از این دو پیکربندی پیش‌بینی و ارزیابی کرد. بنابراین با توجه به اطلاعات جداول، چنانچه بخواهیم گراف‌های هانوی را براساس معیارهای مختلف استحکام رتبه‌بندی کنیم ممکن است به خروجی‌های متفاوت و بعضاً ناسازگاری دست پیدا کنیم. به همین دلیل ما در کنار سایر معیارهای استحکام، از معیارهای سازگار مبتنی بر جریان برای پرهیز از سردرگمی و همچنین ارائه یک رتبه‌بندی منسجم و با صحت، دقت و سازگاری بالا استفاده کرده‌ایم. با این حال در برخی موارد ممکن است که برای مقایسه شبکه‌ها و رتبه‌بندی آنها به کمک معیارهای مختلف استحکام به یک اجماع کلی دست پیدا نکنیم. در این گونه موارد، یک روش مناسب برای رتبه‌بندی شبکه‌ها می‌تواند استفاده ترکیبی از معیارها جهت ارائه یک رتبه‌بندی باشد که با استفاده از ضرایب وزنی و نیز با توجه به اهمیت معیارها در کاربردهای مختلف می‌توان آن را به انجام رساند و بدین ترتیب می‌توان به یک رتبه‌بندی سازگار و به دور از تضاد دست یافت. تمامی نتایج استحکام حاصل شده از گراف هانوی، برای گراف‌های سرپینسکی نیز قابل ارزیابی است اما به علت حجم زیاد مطالب و نتایج مشابه، از بررسی آنها صرف نظر می‌کنیم.

جدول ۱: مقادیر عددی معیارهای مختلف استحکام در انواع گراف‌های هانوی با فرض ثابت بودن تعداد میله‌ها برابر ۳ و متغیر بودن تعداد دیسک‌ها از ۳ تا ۷ به ترتیب از راست به چپ

مشخصات	H_1^*	H_2^*	H_3^*	H_4^*	H_5^*
تعداد گره	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷
تعداد یال	۳۹	۱۲۰	۳۶۳	۱۰۹۲	۳۲۷۹
واریانس درجه	۰,۱۰۲	۰,۰۳۶	۰,۰۱۲	۰,۰۰۴	۰,۰۰۱
واریانس نزدیکی	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۰۱	۲,۹۳۴	۷,۱۰۳	۱,۷۴۵
واریانس بینیت‌گره	۰,۰۰۵۱	۰,۰۰۳۵	۰,۰۰۲۸	۰,۰۰۲۲	۰,۰۰۱۷
واریانس بینیت‌یال	۰,۰۰۳۵	۰,۰۰۲۸	۰,۰۰۲۲	۰,۰۰۱۷	۰,۰۰۱۳
ضریب خوشه‌بندی	۰,۴۰	۰,۳۶	۰,۳۴	۰,۳۳	۰,۳۳۴
همتیپی درجه	۰,۸۲-	۰,۰۲-	۰,۰۰۸-	۰,۰۰۲-	۰
شعاع گراف	۶	۱۲	۲۴	۴۸	۹۶
قطر گراف	۷	۱۵	۳۱	۶۳	۱۲۷
اتصال‌پذیری جبری	۰,۱۴	۰,۰۳	۰,۰۰۶	۰,۰۰۱	۰
انرژی	۳۹,۸۱	۱۲۰,۳۱	۳۶۱,۸۳	۱۰۸۶,۳	۳۲۵۹,۹
انرژی لاپلاسیان	۴۰,۰۶	۱۲۰,۵۶	۳۶۲,۰۷	۱۰۸۶,۶	۳۲۶۰,۲
SFRB	۲,۲۵	۲,۳۸	۲,۴۴	۲,۴۷	۲,۴۹
SFRC	۳,۴۱	۴,۴۸	۶,۲۶	۷,۳۶	۸,۴۵
SFRD	۳,۹۲	۹,۶۳	۲۵,۵۸	۷۴,۱۱	۲۱۸,۵۳

برای سنجش استحکام شبکه، روش‌های مختلفی وجود دارد و ما در این مقاله مطابق با تئوری پرکولاسیون [۵]، میزان استحکام شبکه (R)، را با متوسط سایز بزرگ‌ترین خوشه همبند، $S(q)$ ، در طی فرآیند حذف گره‌ها از شبکه مرتبط می‌کنیم. $S(q)$ ، خود تابعی از درصد حملات به شبکه است و بدین ترتیب معیار استحکام R از متوسط‌گیری بر روی درصد گره‌های واقع در بزرگ‌ترین خوشه همبند $S(q)$ ، پس از حذف Q گره از شبکه محاسبه می‌شود.

$$R = \frac{1}{n+1} \sum_{Q=0}^n S(Q) \quad (15)$$

که n تعداد گره‌های شبکه است. توجه داشته باشید که معیار استحکام فوق در واقع به نوعی با انتگرال سطح زیر منحنی $S(Q)$ در رابطه است. رابطه (۱۵) را می‌توان به شکل تقریبی رابطه (۱۶) نیز نوشت.

$$R = \frac{1}{n+1} \sum_{Q=0}^n S(Q) \approx \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) \approx \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} (n+1) \right) \approx 0.5 \quad (16)$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که معیار استحکام R مبتنی

جدول ۲: مقادیر عددی معیارهای مختلف استحکام در انواع گرافهای هانوی با فرض ثابت بودن تعداد دیسکها برابر ۳ و متغیر بودن تعداد میلهها از ۳ تا ۷ به ترتیب از راست به چپ

مشخصات	H_1^*	H_2^*	H_3^*	H_4^*
تعداد گره	۲۱۶	۱۲۵	۶۴	۲۷
تعداد یال	۱۱۴۰	۴۹۰	۱۶۸	۳۹
واریانس درجه	۳,۰۳۸	۱,۵۸۷	۰,۵۷۱	۰,۱۰۲
واریانس نزدیکی	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۰۵
واریانس بینیت گره	۰	۰	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۰۵۱
واریانس بینیت یال	۰	۰	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۰۳۵
ضریب خوشه بندی	۰,۳۷۲	۰,۳۷۹	۰,۳۸۷	۰,۴۰
همتمیایی درجه	۰,۳۴۸	۰,۲۹۶	۰,۱۹۵	۰,۸۳-
شعاع گراف	۴	۴	۴	۶
قطر گراف	۵	۵	۵	۷
اتصال پذیری جبری	۱,۷۴۹	۱,۱۳۹	۰,۵۸۸	۰,۱۴
انرژی	۵۹۸	۳۰۲	۱۲۶	۳۹,۸۱
انرژی لاپلاسیان	۶۵۵	۳۲۶	۱۳۰	۴۰,۰۶
SFRB	۵۳,۲۷	۲۷,۶	۱۰,۹۱	۲,۲۵
SFRC	۵۸,۷۹	۳۱,۵۱	۱۱,۲۸	۳,۴۱
SFRD	۶۸,۶۶	۳۸,۰۳	۱۶,۹۸	۳,۹۲

جدول ۳: مقادیر استحکام و ناهمگنی برای شبکه‌های شبه سرپینسکی

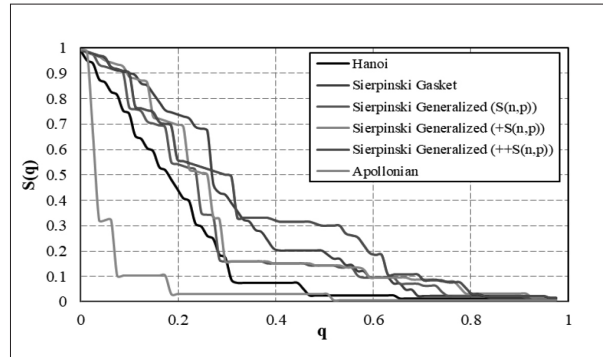
مشخصات	هانوی	سرپینسکی Gasket	سرپینسکی تعمیم یافته		
			$+S(n, p)$	$+S(n, p)$	$S(n, p)$
استحکام (R)	۰,۱۹۹۳	۰,۲۱۵۲۸۲	۰,۱۷۵۴۸۸	۰,۱۹۰۹۸	۰,۲۱۸۲۸۴
شاخص انرژی	۰,۰۰۲۰	۰,۰۱۷۶	۰,۰۰۱۰	۰,۰۰۰۰۴	۰,۰۰۰۰۰۵
شاخص H-index	۰,۰۰۱۶	۰,۰۰۲۵	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۰۰۳۵	۰,۰۰۰۰۰۴
شاخص واریانس نرمال	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۰۰۳	۰,۰۰۰۰۰۳
شاخص مجموع فواصل	۰,۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۳	۰,۰۰۰۰۴	۰,۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۰۱
شاخص آنتروپی کوانتومی	۰,۰۰۱۸	۰,۰۱۰۷	۰,۰۰۰۸	۰,۰۰۰۰۳۷	۰,۰۰۰۰۰۴

شبه سرپینسکی نشان داده شده است. با مقایسه مقادیر ناهمگنی در می‌یابیم که ناهمگنی شبکه سرپینسکی تعمیم یافته نسبت به بقیه شبکه‌ها کمینه و نزدیک به صفر است. نکته قابل توجه این است که تعداد گره‌ها در تمامی شبکه‌ها به صورت یکسان، تقریباً ۱۰۰ در نظر گرفته شده است.

همچنین نمودار $S(Q)$ بر حسب درصد گره‌های حذف شده از شبکه برای گراف‌های مذکور در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. $S(Q)$ سائیز بزرگ‌ترین مؤلفه همبند باقی مانده از شبکه است که با حملات هدف مند بر روی شبکه، در هر مرحله این پارامتر دست‌خوش تغییر می‌شود. همان‌طور که در شکل (۱۱) نشان داده شده است با حمله به گره‌های با بیشترین درجه، گراف آپولونین نسبت به بقیه گراف‌ها زودتر ناهمبند شده و شبکه از دسترس خارج می‌شود و در مقابل گراف سرپینسکی تعمیم یافته از همه دیرتر (یعنی با حذف درصد بیشتر گره‌ها) غیرهمبند می‌شود. در نتیجه شبکه سرپینسکی تعمیم یافته نسبت به مابقی شبکه‌ها منظم‌تر (همگن‌تر) است.

در ادامه، این موضوع را بررسی می‌کنیم که آیا این پنج شاخص ناهمگنی شبکه می‌توانند برای تمایز پیچیدگی ساختاری بین گراف‌های حاصل از شبکه‌های شبه سرپینسکی ذکر شده مورد استفاده قرار بگیرند. بدین

بر $S(Q)$ در بازه $[0/5]$ قرار دارد طوری که $R=0$ متناظر با شبکه‌ای مشتمل بر گره‌های ایزوله و $R=0.5$ متناظر با مستحکم‌ترین پیکربندی از شبکه (یک شبکه کاملاً همبند در طی حمله) است. معیار استحکام R همانند پرکولاسیون می‌تواند درصد بحرانی (نقطه شکست) شبکه را به ما ارائه دهد. بدین سیاق نمودارهای حاصل از برآورد استحکام نشان می‌دهند که پس از حذف چه تعداد گره، شبکه دچار سقوط خواهد شد که این خود معیاری متداول در تئوری پرکولاسیون است. در جدول (۳) سطر اول، مقادیر استحکام R را برای شبکه‌های معرفی شده در بخش (۳) نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود کران بالای مقدار R در حالت ایده‌آل $0/5$ است که البته هیچ یک از این مقادیر نتوانسته‌اند به کران بالا دست یابند و تنها در یک مورد یعنی شبکه سرپینسکی تعمیم یافته توانسته به میزان متوسط استحکام تقریبی $0/3$ نزدیک شود. این شبکه‌ها معمولاً در یک خانواده قرار می‌گیرند زیرا ویژگی‌های مشترک زیادی نسبت به هم دارند. سطرهای دو تا شش جدول (۳) مقادیر R شاخص مهم ناهمگنی (توصیف شده در بخش ۲) شبکه‌های



شکل ۱۱: نمودار بزرگ‌ترین مؤلفه همبند شبکه‌های شبه سرپینسکی بر اساس بیشترین درجه

منظور، در شکل (۱۲) مقادیر عددی پنج معیار مختلف ناهمگنی برحسب تابعی از اندازه گراف ترسیم شده است. مقدار متوسط به شکل نمودار خطی برای پنج معیار ناهمگنی بر روی نمونه‌ها محاسبه شده است.

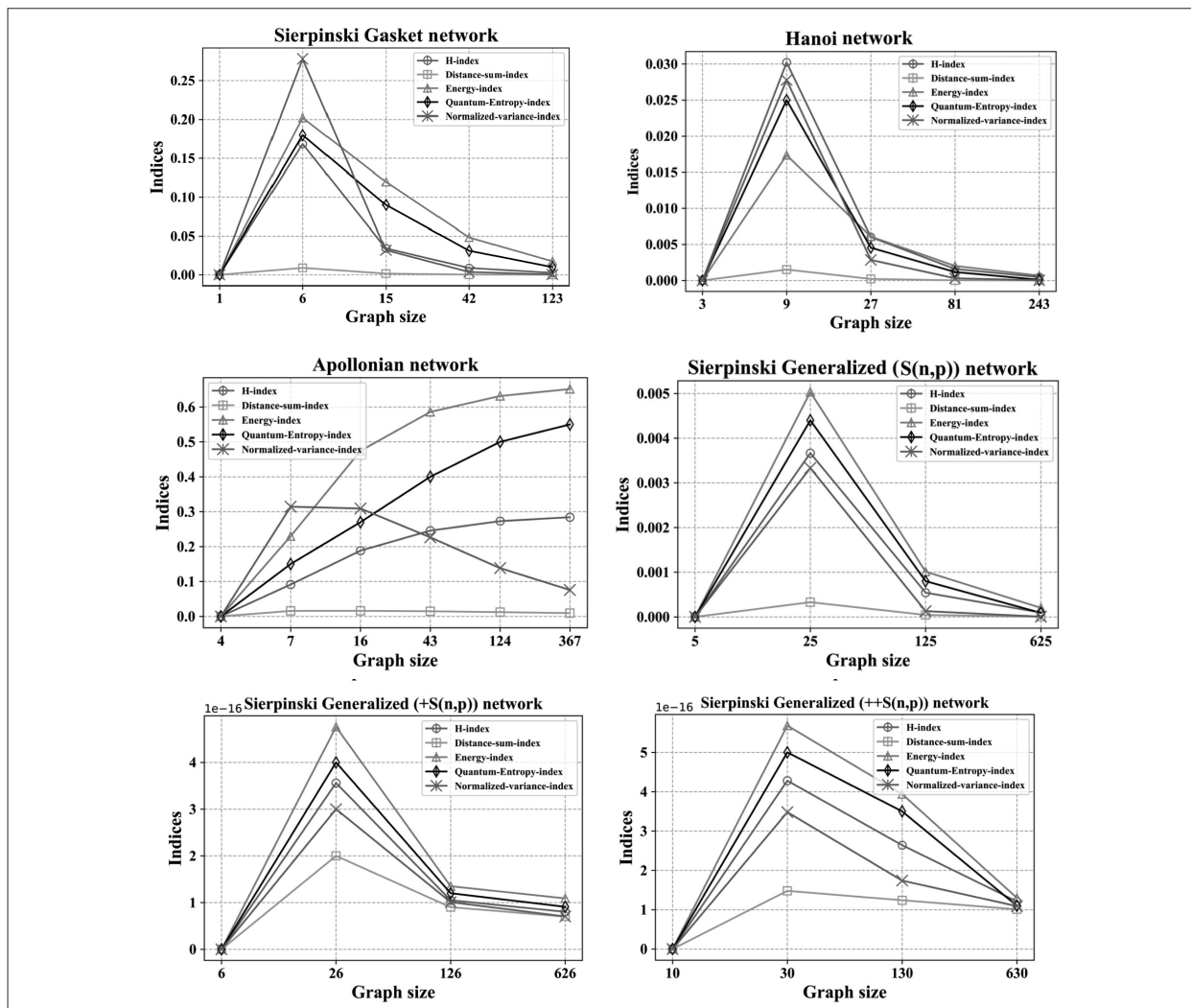
این نمودارها نشان می‌دهند که کدام یک از شاخص‌های ناهمگنی می‌توانند به نحو کارآمدی، گراف‌های شبه سرپینسکی را متمایز کنند. همان‌طور که از شکل (۱۲) پیداست، با افزایش اندازه شبکه‌های شبه سرپینسکی، میزان ناهمگنی آن‌ها کاسته خواهد شد. بایستی اذعان داشت که برای شبکه‌هایی با اندازه بزرگ‌تر میزان ناهمگنی به مقدار نسبتاً ثابتی میل خواهد کرد. نتیجه مهمی که از این نمودارها عایدمان می‌شود این است که در شبکه‌های بازگشتی نیز ممکن است پس از مدتی شاهد ناهمگنی قابل ملاحظه‌ای نباشیم و در نتیجه شاخص‌های ناهمگنی تنها می‌توانند درصد ناچیزی از ناهمگنی گراف‌های شبه-ستاره را گزارش کنند. نکته دیگر هم این است که در یک اندازه مشخصی از گراف‌های شبه سرپینسکی، میزان ناهمگنی تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند. بایستی اشاره داشت که با توجه به پارامترهای تنظیم شده در شبکه‌های بازگشتی، شاخص‌های ناهمگنی ناشی از تنظیم پارامترها به مراتب از آنچه که به دلیل اختلاف در پیچیدگی‌های ساختاری مدل‌ها روی می‌دهد کمتر است و همان‌طور که از نمودارها پیداست، شاخص ناهمگنی انرژی موفق‌تر از سایر معیارها عمل کرده و به نحو بهتری توانسته است تا گراف‌های مختلف را از یکدیگر تمایز بخشد. همان‌طور

که از در نمودارها قابل ملاحظه است میزان شاخص‌های ناهمگنی برای شبکه‌های مختلف اندک است بنابراین گراف‌های سرپینسکی گراف‌های تقریباً منظمی (همگنی) هستند. علت این نظم را نیز می‌توان در همبندی منسجم و همچنین درجات تقریباً یکسان رئوس در نظر گرفت.

بدین سیاق، ملاحظه می‌شود که یکی از کاربردهای مهم هر شاخص ناهمگنی مناسب می‌تواند این باشد که آیا اساساً قادر به یک کلاس‌بندی مناسب از شبکه‌ها هست. این موضوع به ویژه هنگامی که تعدادی زیادی تابع احتمال توزیع درجه برای برآزش وجود دارد، اهمیت پیدا می‌کند زیرا تمایز و کلاس‌بندی گراف‌ها از طریق توزیع درجه به آسانی میسر نخواهد بود.

۵. نتیجه‌گیری

شبکه‌های ارتباطی در حال خدمت‌رسانی به همه نوع فعالیت‌های انسانی هستند. خواه این گنش‌ها در راستای انجام امور تخصصی باشد یا به‌منظور رفاه حال آدمی انجام شده باشد. شبکه‌های پیچیده و اجتماعی که بخش مهمی از دنیای پیرامون ما را شکل می‌دهند در عمکرد روزانه ما و سایر موجودات دخالتی تام و تمام دارند؛ با این همه، این قبیل شبکه‌ها به ندرت برای خدمت‌رسانی به همه این نقش‌ها در نظر گرفته شده‌اند و در برابر گستره وسیعی از چالش‌ها از جمله حملات بدخواهانه، اشکالات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، اشتباهات انسانی (برای مثال پیکربندی نامناسب سخت‌افزاری و نرم‌افزاری) بسیار آسیب‌پذیر طراحی شده‌اند. در طی سال‌های اخیر، شاخص‌های مختلفی جهت برآورد میزان ناهمگنی موجود در شبکه‌ها معرفی شده‌اند. این شاخص‌ها عمدتاً بر مبنای درجه هستند. در این مقاله ما با استفاده از مهم‌ترین معیارهای مختلف استحکام و ناهمگنی، تلاش کردیم تا توصیف نسبتاً سازگاری از آسیب‌پذیری و ناهمگنی انواع مختلفی از پیکربندی‌های گراف‌های شبه سرپینسکی را ارزیابی و تحلیل کنیم. نشان داده شده که ایزومورفیزی می



شکل ۱۲: معیارهای مختلف ناهمگنی H-index، واریانس نرمال، انرژی و انتروپی کوانتومی برحسب تابعی از اندازه گرافهای شبه سرپینسکی برای شبکه‌های بازگشتی هانوی، سرپینسکی، سرپینسکی تعمیم یافته و آپولونی

ترتیب، مطالعه بیشتر تاب‌آوری و ناهمگنی گرافهای بازگشتی می‌تواند بسیار سودمند باشد و به‌عنوان کار آتی در راستای مطالعه حاضر می‌تواند پیشنهاد گردد.

مراجع

1. Reka, A., The Internet Achilles' Heel: Error and Attack Tolerance of Complex Networks. Physica A, Elsevier Science by, 2000
2. Udell, M., Introduction to Spectral Graph Theory., 2011.
3. Gutman, Ivan. An approximate Hückel total π -electron energy formula for benzenoid aromatics: Some amendments. Polycyclic Aromatic Compounds 4.4 (1995): 271-274.
4. Freeman, L.C., Centrality in social networks conceptual clarification. Social networks, 1(3), pp.215-239, 1978.
5. Barabási, A.L., Network science. Cambridge university

بین گرافهای هانوی و یک دنباله از گرافهای فراهم شده از تقریب‌هایی به مثلث سرپینسکی برقرار است. گرافهای سرپینسکی در بررسی‌های فضاها و توپولوژیکال جهانی^{۳۴} روی می‌دهند و در ضمن به‌عنوان زیرگرافهای پوشایی قابل تعبیه در گرافهای هانوی هستند. نتیجه مهمی که از این پژوهش عایدمان می‌شود این است که شبکه‌های بازگشتی تقریباً منتظم (همگن) هستند و در مقابل دارای استحکام کارآمدی هستند. از بین شبکه‌های شبه سرپینسکی معرفی شده در این مقاله، شبکه سرپینسکی S_p^{++} دارای مستحکم‌ترین و همگن‌ترین ساختار است که می‌تواند در کاربردهای مختلف شبکه مورد استفاده قرار گیرد. بدین

34- Universal topological spaces

- putational Science, Vol. 36, p.101011, 2019.
16. Emadi Kouchak MM, Safaei F, Reshadi M. Graph entropies-graph energies indices for quantifying network structural irregularity. The Journal of Supercomputing. 2022 Aug 2:1-45.
 17. Li, C.K. and Nelson, I., Perfect codes on the towers of Hanoi graph. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 57(3), pp.367-376, 1998.
 18. Hinz, Andreas M., et al. Metric properties of the Tower of Hanoi graphs and Stern's diatomic sequence. European Journal of Combinatorics 26.5 (2005): 693-708.
 19. Hinz, Andreas M., and Daniele Parisse. On the planarity of Hanoi graphs. Expositiones Mathematicae 20.3 (2002): 263-268.
 20. Hinz, A. M., & Schief, A. The average distance on the Sierpiński gasket. Probability theory and related fields, 87(1), 129-138, 1990.
 21. Klavžar, S., & Milutinović, U. Graphs $S(n, k)$ and a variant of the Tower of Hanoi problem. Czechoslovak Mathematical Journal, 47(1), 95-104, 1997.
 22. Hinz, A. M., Klavžar, S., & Zemljčič, S. S. A survey and classification of Sierpiński-type graphs. Discrete Applied Mathematics, 217, 565-600, 2017.
 23. Andrade Jr, J. S., Herrmann, H. J., Andrade, R. F., & da Silva, L. R. Erratum: Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, Euclidean, space filling, and with matching graphs. [Phys. Rev. Lett. 94, 018702 (2005)]. Physical Review Letters, 102(7), 079901, 2009.
 24. Alencar, D. S. M., Macedo-Filho, A., Alves, T. F. A., Alves, G. A., Ferreira, R. S., & Lima, F. W. S. (2021). Modified Epidemic Diffusive Process on the Apollonian Network. arXiv preprint arXiv:2110.14141.
6. Alenazi, M.J. and Sterbenz, J.P., Comprehensive comparison and accuracy of graph metrics in predicting network resilience. In 2015 11th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN), IEEE, (pp. 157-164), 2015, March.
 7. Wu, Jun, et al. Spectral measure of structural robustness in complex networks. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans 41.6 (2011): 1244-1252.
 8. I. Gutman, Topological indices and irregularity measures, J. Bull, Vol. 8, pp.469-475, 2018.
 9. A-L. Barabási and R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks, Science, Vol. 286, No. 5439, pp. 509-512, 1999.
 10. E. Estrada, Quantifying network heterogeneity, Physical Review E, Vol. 82, No. 6, p.066102, 2010.
 11. E. Estrada and E. Vargas-Estrada, Distance-sum Heterogeneity in Graphs and Complex Networks, Applied Mathematics and Computation, Issue 218, pp. 10393-10405, 2012.
 12. R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, in Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, Jan. 2007, doi: 10.1109/JPROC.2006.887293.
 13. A.T. Balaban, Highly discriminating distance-based topological index, Chem. Phys. Lett., Vol. 89, pp. 399-404, 1982.
 14. K.M. Smith and J. Escudero, Normalised degree variance, Applied Network Science, Vol. 5, No. 1, pp.1-22, 2020.
 15. F. Safaei, S. Tabrizchi, A.H. Rasanan, M. Zare, An energy-based heterogeneity measure for quantifying structural irregularity in complex networks, Journal of Com-

جدیدترین کتاب

از انتشارات انجمن انفورماتیک ایران

منتشر شد!

تراوش های ذهنی

تهیه کتاب از دفتر انجمن انفورماتیک ایران
(۶۶۴۱۲۸۶۱) و فروشگاه اینترنتی چاره

www.chare.ir

قیمت ۴۰/۰۰۰ تومان

تراوش های ذهنی

۲۵ شیوه نگرش به هوش مصنوعی

ترجمه: ابراهیم نقیب زاده مشایخ

ویراستار:

جان پروکمن

وکتی رامکارینشان
الکسین هساجیچ اینتلید
هانس اولدینز اوبرست
الیسون گوینک
بیر گلسون
جرج مکدونالد جرج
کلورینا جونز
اسفن ولفرم

بیات لوبد
جودنا بیل
استورت راسل
جرج داسون
فلسفیل کنت
رکسی پروکز
فرانک ویلیک
مکس تکساری

جیان تاجمین
استیون پونیک
دیوید تویچ
تام گریلیس
آکسا درگان
کریس اندرسون
دیوید کاسیز
نیل گرنفیلد
دانیل هیلس

ISI انجمن انفورماتیک ایران