

الگوریتمی زمان خطی برای پیدا کردن مسیرهای همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L - شکل با اندازه فرد

مجتبی غریب بلوکی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
پست الکترونیکی: mojtaba.gharibbolooki@shahed.ac.ir

فاطمه کشاورز کوهجردی*

استادیار، گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
پست الکترونیکی: f.keshavarz@shahed.ac.ir

چکیده

گراف توری G_g یک زیرگراف رأس القایی محدود از یک گراف توری نامتناهی G_∞ است که مجموعه رؤوس آن تمام نقاط صفحه با مختصات صحیح است و دو رأس از طریق یالی به هم متصل هستند، اگر و تنها اگر فاصله اقلیدسی بین آنها یک باشد. مسئله مسیر همیلتونی مشخص می‌کند که آیا یک گراف شامل یک مسیر ساده است که در آن هر رأس از گراف دقیقاً یکبار ملاقات شود. این مسئله برای گراف‌های عمومی و همچنین برای گراف‌های توری عمومی یک مسئله NP -کامل است. در این مقاله، مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t برای گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L - شکل به طوری که اندازه کل گراف فرد است را بررسی می‌کنیم. در ابتدا شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t را بیان می‌کنیم و در ادامه الگوریتم زمان خطی برای ساخت مسیر همیلتونی را ارائه می‌دهیم. الگوریتم بیان شده در این مقاله به روش تقسیم و غلبه مسئله را حل می‌کند، به این صورت که ابتدا گراف را به تعدادی زیرگراف افراز می‌کند، سپس در هر کدام از زیرگراف‌ها مسیر همیلتونی یا دور همیلتونی را به دست

می‌آورد و در پایان با ترکیب آن‌ها، مسیر همیلتونی در کل گراف ساخته می‌شود.

کلید واژه‌ها: مسیر همیلتونی، NP -کامل، گراف توری، گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل

۱. مقدمه

مسئله مسیر همیلتونی، یعنی پیدا کردن مسیری ساده در گراف به طوری که هر رأس دقیقاً یکبار ملاقات شود، یکی از مهم‌ترین مسائل در نظریه گراف است و کاربردهای بسیاری دارد [۱، ۲، ۳]. این مسئله یکی از مسائل NP -کامل مشهور در نظریه گراف است که ثابت شده است برای گراف‌های عمومی NP -کامل است [۲] همچنین برای برخی از رده‌های گراف مانند گراف توری عمومی [۴]، گراف‌های مسطح [۵]، گراف‌های جهت‌دار [۲] نیز ثابت شده است که NP -کامل است و تنها تعداد بسیار اندکی الگوریتم زمان چندجمله‌ای در رده‌های خاصی از گراف‌ها برای این مسئله ارائه شده است. با وجود کاربردهای زیاد برای این مسئله، هنوز برای بسیاری از رده‌های گراف، این مسئله باز است. در این مقاله، روی گراف‌های توری تمرکز می‌کنیم. گراف

* نویسنده مسئول

توری G_{∞} یک گراف نامتناهی غیرجهت‌دار است که مجموعه رئوس آن نقاط صفحه با مختصات صحیح است و بین دو رأس آن یک یال وجود دارد اگر فاصله اقلیدوسی بین آن‌ها یک باشد. گراف توری، یک زیرگراف رأس‌القایی محدود از یک گراف نامتناهی G_{∞} است. گراف توری بدون حفره یک گراف توری است که هیچ حفره‌ای نداشته باشد. گراف توری مستطیلی یک گراف توری است که توسط یک مستطیل موازی محور محدود شده است. گراف توری L -شکل، یک گراف توری مستطیلی است که یک زیرگراف توری مستطیلی از یکی از گوشه‌های آن حذف شده است.

پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های توری دارای کاربردهای زیادی است. اگر بخواهیم به یکی از کاربردهای این مسئله اشاره کنیم می‌توانیم یکی از مباحث مهم در طراحی و ارزیابی شبکه‌های ارتباطی در پردازش موازی را در نظر بگیریم که مطالعه این موضوع است که چقدر خوب می‌توان شبکه‌های موجود دیگر را در این شبکه (توری) تعبیه کرد [۱]. یکی دیگر از کاربردهای این مسئله، استفاده از آن برای روبات‌های جاروب‌کننده خودکار است. سطح کف یک ساختمان را می‌توان به صورت موزائیک‌بندی شده فرض کرد و یک روبات جاروب‌کننده که باید همه این موزائیک‌ها را جاروب کند، برای انجام این جاروب، می‌توان دوگان این سطح موزائیک شده که یک گراف توری است را در نظر گرفت و مسیر همیلتونی در آن را پیدا کرد. اگر روبات روی این مسیر همیلتونی حرکت کند کل سطح کف ساختمان جاروب می‌شود. اگر در کف ساختمان موانعی مثل نورگیر و غیره وجود داشته باشد، آنگاه گراف توری حفره‌دار خواهد بود.

ایتای و همکارانش [۴] ثابت کردند که مسئله مسیر همیلتونی در گراف‌های توری عمومی NP -کامل است. همچنین شرایط لازم و کافی برای وجود مسیر همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی را به دست آوردند و یک الگوریتم زمان خطی برای پیدا کردن مسیر ارائه کردند. چن و همکارانش [۶]، الگوریتم ارائه شده در [۴] را بهبود بخشیدند و یک الگوریتم موازی برای مسئله مسیر همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی

ارائه کردند. کشاورز کوهجردی و باقری [۷]، یک الگوریتم زمان خطی برای مسئله مسیر همیلتونی در رده خاصی از گراف‌های توری (گراف‌های توری الفبایی) مانند L, C, F و E ارائه کردند. همچنین آن‌ها [۸, ۹, ۱۰, ۱۱]، یک الگوریتم زمان خطی برای مسائل مسیر و دور همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی که یک حفره مستطیلی از آن حذف شده است، ارائه کردند. در [۱۲]، شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در حالت خاصی از گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L -شکل، که $a=b=1$ یا $a=c=1$ ، بررسی شده است.

در این مقاله، مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L -شکل که اندازه کل گراف فرد است، $s_x, t_x \leq d$ و b و d هر دو زوج هستند را بررسی می‌کنیم (شکل (۱)).

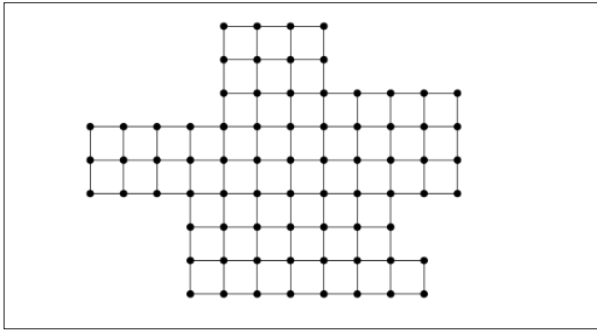
ساختار مقاله به این صورت است: در بخش ۲، تعاریف و نتایج قبلی بیان شده است. در بخش ۳، شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L -شکل به طوری که اندازه کل گراف فرد است، بیان شده است. در بخش ۴، یک الگوریتم زمان خطی برای پیدا کردن مسیر بین دو رأس معین s و t ارائه شده است. نتیجه‌گیری نیز در بخش ۴ بیان شده است.

۲. تعاریف مقدماتی

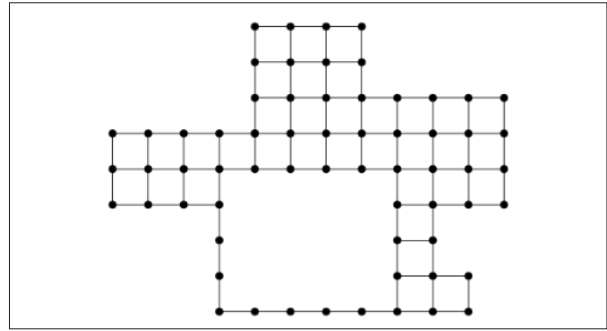
در این بخش، تعاریف و نتایجی که در سرتاسر مقاله به آن نیاز داریم را بیان می‌کنیم.

گراف توری G_g ، یک زیرگراف رأس‌القایی محدود از یک گراف نامتناهی G_{∞} است. یکی از ویژگی‌های گراف‌های توری، مسطح بودن آن‌ها است و ویژگی دیگر آن‌ها این است که درجه هر رأس در آن حداکثر چهار است. هر وجه از گراف توری، یک سلول نامیده می‌شود. هر وجه متناهی که سلول نباشد، یک حفره نامیده می‌شود. شکل (۱) یک گراف توری حفره‌دار را نشان می‌دهد. گراف توری بدون حفره، گراف توری است که حفره نداشته باشد (شکل (۲)).

فرض کنید $G_g = (V, E)$ یک گراف توری با مجموعه



شکل ۲: گراف توری بدون حفره



شکل ۱: گراف توری حفره‌دار

● $|V_B| = |V_W|$ باشد و s و t رنگ متفاوت داشته باشند.
 ● $\|V_B| - |V_W|\| = 1$ باشد و s و t رنگ اکثریت داشته باشند.
 فرض کنید $|V_B| = |V_W|$ (متناظراً $\|V_B| - |V_W|\| = 1$) یعنی تعداد رؤوس سیاه با تعداد رؤوس سفید برابر (متناظراً اختلاف تعداد رؤوس سیاه و سفید دقیقاً یک) باشد. آنگاه دو رأس پایانی هر مسیر همیتونی در گراف باید رنگ متفاوت (متناظراً رنگ اکثریت) داشته باشند. در نتیجه، سازگاری-رنگی رؤوس s و t شرط لازم برای وجود مسیر همیتونی در گراف‌های توری است.

فرض کنید $R(m, n)$ یک گراف توری مستطیلی با مجموعه رؤوس $V(R) = \{v \mid 1 \leq v_x \leq m, 1 \leq v_y \leq n\}$ باشد. یعنی، گراف توری $R(m, n)$ شامل m سطر و n ستون از گراف توری نامتناهی G_∞ است. شکل (۳) یک گراف توری $R(6, 7)$ را نشان می‌دهد. یک گراف توری مستطیلی را L -مستطیل گوئیم اگر $k = m$ یا $k = n$ باشد. اندازه یک گراف توری زوج است اگر $|V_B| = |V_W|$ باشد، همچنین اندازه گراف توری فرد است اگر $\|V_B| - |V_W|\| = 1$ باشد. در این مقاله، مختصات رأس $(1, 1)$ را گوشه بالا سمت چپ در نظر می‌گیریم (شکل (۴)).

گراف توری L -شکل که آن را با $L(m, n; k, l)$ نشان می‌دهیم، یک گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ است که یک زیرگراف توری مستطیلی $R(k, l)$ از یک گوشه آن حذف شده باشد (شکل (۴)).

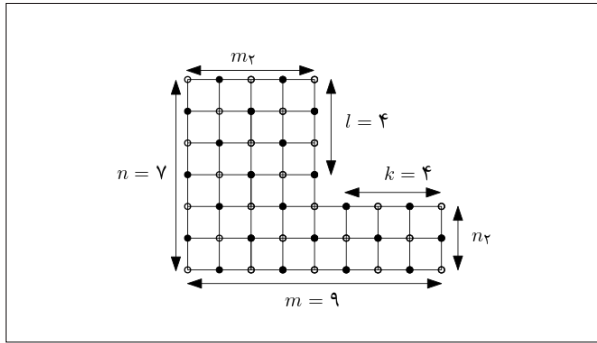
گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل $\mathfrak{R}(m, n; m_1, n_1, k, l; a, b, c, d)$ ، یک گراف توری مستطیلی است که یک زیرگراف توری L -شکل از آن حذف شده است به طوری که زیرگراف حذف شده با گراف توری مستطیلی هیچ مرز

یال‌های E و مجموعه رؤوس V باشد. فرض کنید v یک رأس دلخواه از G_g باشد. درجه رأس v را با $\text{degree}(v)$ نشان می‌دهیم. همچنین دو رأس مجاور v و w در G_g را با $w \sim v$ نشان می‌دهیم. دو یال (u_1, v_1) و (u_2, v_2) را موازی نامیده می‌شود اگر u_1 (متناظراً v_1) مجاور با u_2 و v_1 (متناظراً v_2) مجاور با v_2 باشد.

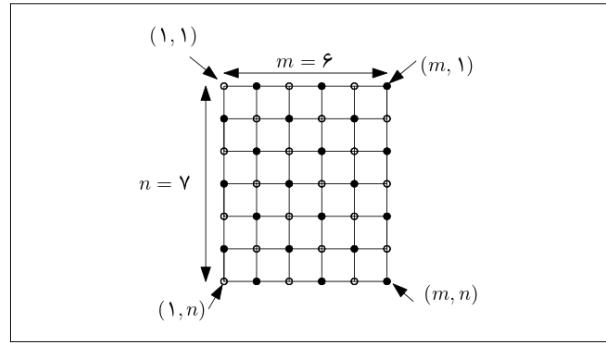
برای رأس v فرض کنید v_x و v_y به ترتیب مختصات x و y آن متناظر در صفحه مختصات باشد و آن را به صورت (v_x, v_y) نشان می‌دهیم. گراف‌های توری، گراف‌هایی دوبرخی هستند [۴]. گراف‌های دوبرخی دو رنگ‌پذیر هستند، بنابراین، گراف‌های توری را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در این مقاله، رؤوس سیاه را با V_B و رؤوس سفید را با V_W نشان می‌دهیم، اگر $v_x + v_y$ زوج باشد آنگاه رأس v را با رنگ سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم؛ در غیر این صورت رأس v را با رنگ سیاه رنگ‌آمیزی می‌کنیم. اندازه یک گراف توری برابر تعداد رؤوس آن است و با $|G_g|$ نشان می‌دهیم.

از آنجایی که گراف‌های توری دوبرخی هستند و با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی می‌شوند، بنابراین رنگ رؤوس به‌طور متناوب بین سیاه و سفید در حال تغییر است. در نتیجه، در هر مسیر یا دور هیچ یالی بین دو رأس هم‌رنگ وجود ندارد. تعداد رؤوس سیاه و سفید در گراف توری ممکن است متفاوت باشد. رنگ اکثریت یعنی رنگی که تعداد رؤوس بیشتری با آن رنگ‌آمیزی شده است و رنگ اقلیت یعنی رنگی که تعداد رؤوس کمتری با آن رنگ‌آمیزی شده است.

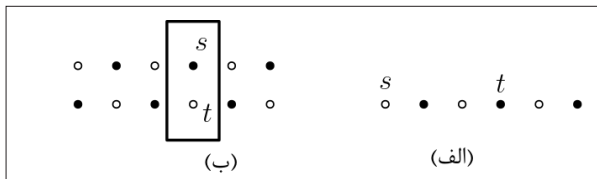
تعریف ۱ [۴]: گراف توری G_g با دو رأس معین s و t سازگار-رنگی است اگر



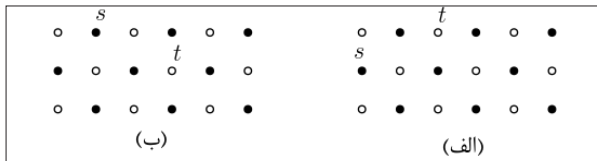
شکل ۴: گراف توری L -شکل با مشخص کردن پارامترهای آن



شکل ۳: گراف توری مستطیلی با $m=6$ و $n=7$ که چهار گوشه آن مشخص شده است



شکل ۶: (الف) یک رأس برشی است، (ب) $\{s,t\}$ یک برش رأسی است



شکل ۷: حالت‌هایی که در گراف توری مستطیلی مسیر همیتونی وجود ندارد (الف) $s_y = 2$ و (ب) $s_y \neq 2$

(۲م) $R(m,n)$ یکرخت با یک گراف سه-مستطیلی $R(m,n)$ باشد به طوری که

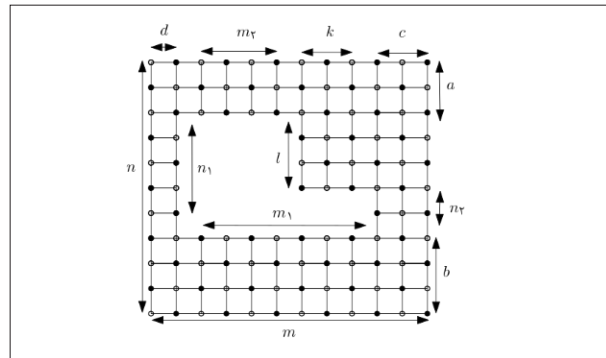
۱. m زوج باشد، $n=3$
۲. s سیاه باشد، t سفید باشد،
۳. $s_y = 2$ و $s_x < t_x$ (شکل (الف)) یا $s_y \neq 2$ و $s_x < t_x - 1$ (شکل (ب)).

تعریف ۲ [۴]: مسئله مسیر همیتونی $(R(m,n),s,t)$ قابل قبول است اگر سازگار-رنگی باشد و در هیچ یک از شرایط (م) و (۲م) صدق نکند.

قضیه ۱ [۴]: با داشتن یک گراف توری مستطیلی $R(m,n)$ و دو رأس مجزا s و t ، $HP(R(m,n),s,t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر $(R(m,n),s,t)$ قابل قبول باشد.

قضیه ۲ [۴]: با داشتن یک گراف توری مستطیلی $R(m,n)$ و دو رأس مجزای s و t ، مسیر همیتونی بین s و t در زمان خطی ساخته می‌شود.

لم ۳ [۴]: گراف توری مستطیلی $R(m,n)$ دور همیتونی



شکل ۵: گراف توری مستطیلی که یک زیرگراف توری L -شکل از آن حذف شده است و مشخص کردن پارامترهای آن

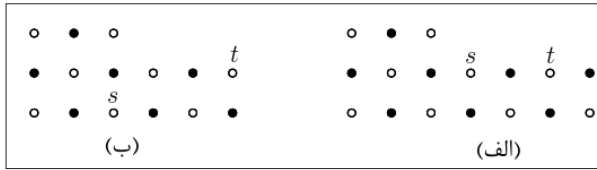
مشترکی نداشته باشند (شکل (۵)). در سرتاسر این مقاله، گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل را به اختصار با \mathfrak{R} نمایش می‌دهیم.

در ادامه، مسیر همیتونی در گراف توری G_g بین دو رأس معین s و t را با $HP(G_g,s,t)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم $s_x \leq t_x$. اگر مسیر همیتونی بین دو رأس معین s و t در گراف توری G_g وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم $HP(G_g,s,t)$ وجود دارد.

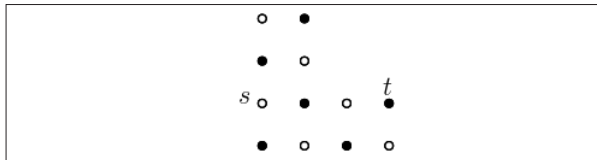
برای حل مسئله از الگوریتم ساخت مسیر همیتونی در گراف‌های توری مستطیلی و L -شکل استفاده می‌کنیم. بنابراین در اینجا نتایج کارهای انجام شده روی این گراف‌ها را بیان می‌کنیم.

علاوه بر شرط سازگار-رنگی ای‌تای و همکارانش [۴]، نشان دادند که اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه مسیر همیتونی در گراف‌های توری مستطیلی وجود ندارد.

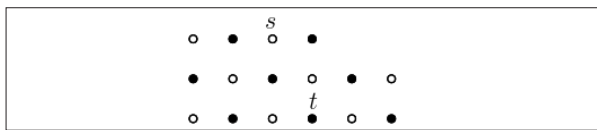
(م) یا t رأس برشی باشد (شکل (۶) (الف)) یا $\{s,t\}$ برش رأسی باشد (شکل (۶) (ب)).



شکل ۹: حالت‌هایی که در گراف توری L -شکل مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد و شرط (۵م) رخ دهد



شکل ۱۰: حالتی که در گراف توری L -شکل مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد و شرط (۶م) رخ دهد



شکل ۱۱: حالتی که در گراف توری L -شکل مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد و شرط (۷م) رخ دهد

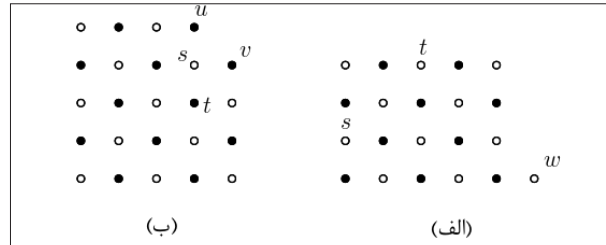
در $t, t' = t$ اگر $s' = u$ یا $t' = u$ آنگاه $s' \text{ (or } t') \notin G_1$ در شرط (۲م) صدق کند (شکل (۱۲)).

(۹م) $L(m, n; k, l)$ زوج باشد و $(m_2 > 3$ و $n_2 = 3)$ یا $(m_2 = 3$ و $n_2 \geq 3)$. فرض کنید $\{G_1, G_2\}$ یک افراز افقی یا عمودی یا -شکل از $L(m, n; k, l)$ باشد به طوری که G_1 و G_2 زوج هستند، یک زیرگراف توری ۳-مستطیلی و $G_2 = L(m, n; k, l) \setminus G_1$ (شکل (۱۳)). فرض کنید G_1 و G_2 دقیقاً از طریق سه رأس u, v, w به هم متصل باشند به طوری که $u, v, w \in G_1$. فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ اگر $s' \text{ (or } t') \notin G_1$ آنگاه $s' = w$ (یا $t' = w$) در شرط (۲م) صدق کند.

تعریف ۳ [۸]: مسئله مسیر همیلتونی $P(L(m, n; k, l), s, t)$ قابل قبول است اگر سازگار-رنگی باشد و در هیچکدام از شرایط (۱م) و (۳م)-(۹م) صدق نکند.

قضیه ۴ [۸]: با داشتن یک گراف توری L -شکل $L(m, n; k, l)$ و دو رأس مجزا s و t ، $HP(L(m, n; k, l), s, t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر $(L(m, n; k, l), s, t)$ قابل قبول باشد.

قضیه ۵ [۸]: با داشتن یک گراف توری L -شکل $L(m, n; k, l)$ و دو رأس مجزای s و t ، مسیر همیلتونی بین s و t در $L(m, n; k, l)$ در زمان خطی ساخته می‌شود.



شکل ۸: حالت‌هایی که در گراف توری L -شکل مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد (الف) شرط (۳م) و (ب) شرط (۴م)

دارد اگر و تنها اگر باشد $|V_B| = |V_w|$ و $m, n > 1$.

کشاوری کوهجردی و باقری [۸]، شرایط لازم برای وجود مسیر در گراف‌های توری L -شکل را به دست آوردند و ثابت کردند که علاوه بر شرط (۱م) اگر یکی از شرایط زیر رخ دهد آنگاه بین دو رأس معین s و t در $L(m, n; k, l)$ مسیر همیلتونی وجود ندارد. دقت کنید در ادامه تمام حالت‌های یکرخت حذف شده‌اند.

(۳م) $\text{degree}(w) = 1, w \in V(L(m, n; k, l))$ و $t \neq w$ و $s \neq w$

(شکل (۸) (الف)).

(۴م) $L(m, n; 1, 1)$ زوج باشد، $m-1 = \text{even} > 2$ ، $n-1 = \text{even} > 2$

، $s = (m-1, 2)$ و $t \neq (m-1, 1)$ یا $t \neq (m, 2)$ (شکل ۸ (ب)). در اینجا نقش s و t می‌تواند عوض شود یعنی $t = (m-1, 2)$ و $s \neq (m-1, 1)$.

(۵م) $L(m, n; k, l)$ فرد باشد، $n_2 = 2$ ، $m_2 = \text{odd} \geq 3$ و

$s_x, t_x > m_2$ (شکل (۹) (الف)) یا $s = (m_2, n)$ و $t_x > m_2$ (شکل

(۹) (ب)).

(۶م) $L(m, n; k, l)$ زوج باشد، $n_2 = m_2 = 2$ ، $s = (1, n_2)$ و

$t_x > 2$ (شکل (۱۰)).

(۷م) تمام حالاتی که یکرخت با حالت زیر هستند.

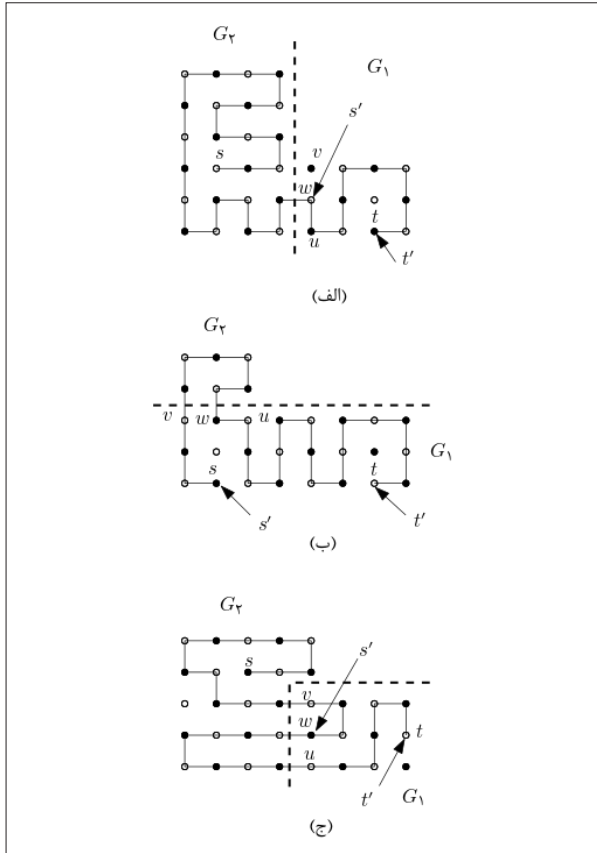
$L(m, n; k, l)$ زوج باشد، $n = 3$ ، $l = 1$ ، $m_2 = \text{even} > 2$ ،

و $s = (m_2 - 1, 1)$ و $t = (m_2, 3)$ (شکل (۱۱)).

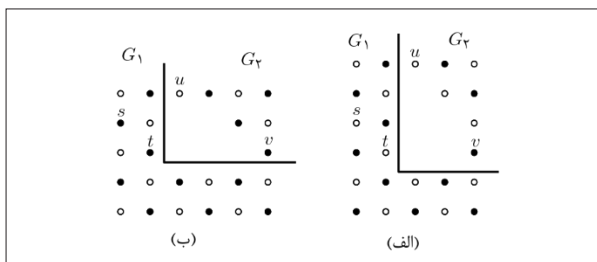
(۸م) $L(m, n; k, l)$ زوج باشد و $(m_2 > 2$ و $n_2 = 2)$ یا

$(m_2 = 2$ و $n_2 > 2)$. فرض کنید $\{G_1, G_2\}$ یک افراز افقی یا

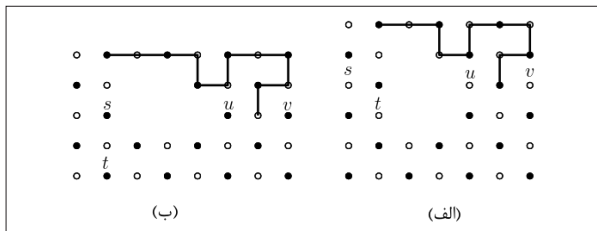
عمودی از $L(m, n; k, l)$ باشد به طوری که G_1 یک زیرگراف توری ۳-مستطیلی و G_2 یک زیرگراف توری ۲-مستطیلی باشد. فرض کنید G_1 و G_2 دقیقاً از طریق دو رأس u و v به هم متصل باشند به طوری که $u, v \in G_1$. فرض کنید $s' = s$ و



شکل ۱۲: حالت‌هایی که در گراف توری L -شکل مسیر همیتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد و شرط (۷م) رخ دهد شرط (۹م)

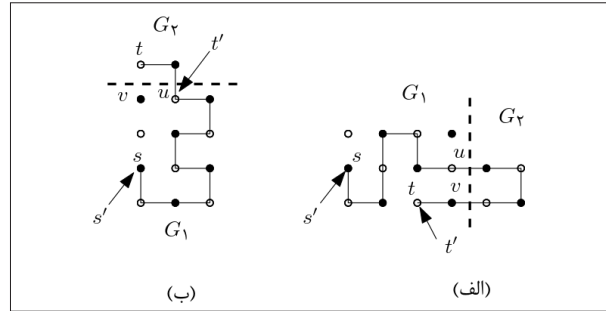


شکل ۱۳: حالت‌هایی که در گراف توری L -شکل مسیر همیتونی وجود ندارد (الف) n زوج است و n فرد است (ب)



شکل ۱۴: حالت‌هایی که در گراف توری $\mathfrak{R}(s, t)$ مسیر همیتونی وجود ندارد و شرط (۱۱م) رخ دهد

مسیر همیتونی است. به وضوح اگر شرط سازگار-رنگی برقرار نباشد در گراف بین دو رأس معین s و t مسیر وجود ندارد. در نتیجه، بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم



شکل ۱۵: حالت‌هایی که در گراف توری L -شکل مسیر همیتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد و شرط (۸م) رخ دهد

۳. شرایط لازم

در این بخش، شرایط لازم برای وجود مسیر همیتونی بین دو رأس معین s و t در گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل که اندازه کل گراف فرد است، $s_x, t_x \leq d$ و b و d زوج هستند را بیان می‌کنیم.

از بخش ۲ می‌دانیم که شرط سازگار-رنگی شرط لازم برای وجود مسیر همیتونی در $HP(\mathfrak{R}, s, t)$ است. علاوه بر شرط (۱م) اگر یکی از شرایط زیر رخ دهد آنگاه مسیر همیتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد.

$$(۱۰م) \quad a = c = 1$$

۱. n زوج باشد و m فرد باشد (شکل (۱۴) (الف))

۲. n فرد باشد و m زوج باشد (شکل (۱۴) (ب))

$$(۱۱م) \quad a = 1 \text{ و } c = 3$$

۱. n زوج باشد و m فرد باشد (شکل (۱۵) (الف))

۲. n فرد باشد و m زوج باشد (شکل (۱۵) (ب))

(۱۲م) $a = 3, c$ و n فرد باشد و m زوج باشد (شکل (۱۶))

تعریف ۴: مسئله مسیر همیتونی در گراف توری

مستطیلی با یک حفره L -شکل $P(\mathfrak{R}, s, t)$ قابل قبول است اگر (\mathfrak{R}, s, t) سازگار-رنگی باشد و در هیچکدام از شرایط (۱م)، (۱۰م)-(۱۲م) صدق نکند.

قضیه ۶: با داشتن یک گراف توری مستطیلی با یک حفره

L -شکل (\mathfrak{R}, s, t) و دو رأس معین s و t ، اگر در \mathfrak{R} بین s و t مسیر همیتونی داشته باشد، آنگاه آن قابل قبول است.

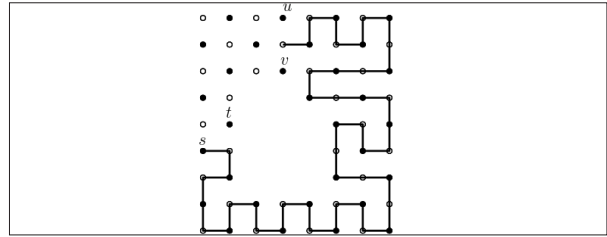
اثبات: فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت ثابت

خواهیم کرد که (\mathfrak{R}, s, t) مسیر همیتونی ندارد. همانطور که قبلاً بیان شد شرط سازگار-رنگی شرط لازم برای وجود

\mathfrak{R} باشد به طوری که $G_2 = R(d, n - n_1')$, $G_1 = R(d, n_1')$ که $G_3 = L(m - d, a + l; m_2, l)$ و $G_4 = L(m - d, n - a - l; m_1, n_2)$ که $n_1' = \max(s_y, t_y) - 1$ اگر $(a = 2)$ و $(s = (d, 1))$ یا $(b = 2)$ و $(t = (1, n - 1))$ ؛ در غیر این صورت $n_1' = \min(s_y, t_y)$ است. فرض کنید $s, p \in G_1, q, t \in G_2, u, v \in G_3, w, z \in G_4$ به طوری که $v \sim w$ و $q \sim z, p \sim u$ باشد (شکل (۱۷) را ببینید). q, p و v رؤس اتصال هستند.

فرض کنید $x_1 = (d, 1)$ چون d زوج است پس G_1 و G_2 زوج هستند. بنابراین اگر s و x_2 هم‌رنگ باشند آنگاه رأس اتصال $p = (d, 2)$ در غیر این صورت $p = (d, 1)$ است. همچنین برای رأس اتصال q ، فرض کنید $x_2 = (d, n)$ ، اگر t و x_2 هم‌رنگ باشند آنگاه $q = (d, n - 1)$ در غیر این صورت $q = (d, n)$. همچنین اگر $b > 2$ و $t = (1, n - 1)$ و t و x_2 غیر هم‌رنگ باشند آنگاه $q = (d, a + n_1 + 1)$. حال G_3 و G_4 را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $m - d$ زوج باشد یا $a + l$ زوج باشد. اگر m_2 زوج باشد یا l زوج باشد (متناظراً m_2 و l فرد باشند) آنگاه G_3 زوج (متناظراً G_3 فرد) است، و این نتیجه می‌دهد که G_4 فرد (متناظراً G_4 زوج) است. فرض کنید $m - d$ و $a + l$ فرد باشند. اگر m_2 زوج باشد یا l زوج باشد (متناظراً m_2 و l فرد باشند) آنگاه G_3 فرد (متناظراً G_3 زوج) است، و این نتیجه می‌دهد که G_4 زوج (متناظراً G_4 فرد) است. فرض کنید G_3 زوج (متناظراً فرد) باشد. فرض کنید $x_3 = (m, a + l)$ در این صورت اگر x_3 و u هم‌رنگ باشند رأس اتصال $v = (m - 1, a + l)$ (متناظراً $v = (m, a + l)$) است در غیر این صورت $v = (m, a + l)$ (متناظراً $v = (m - 1, a + l)$).

حال نشان می‌دهیم که $(G_1, s, p), (G_2, q, t), (G_3, u, v)$ و (G_4, w, z) قابل قبول هستند. با توجه به مختصات w, v, u, q, p و z به وضوح می‌توان مشاهده کرد که شرط سازگار-رنگی در زیرگراف‌های G_1, \dots, G_4 برقرار است. حال باید ثابت کنیم که هیچکدام از زیرگراف‌ها در شرایط ممنوعه قرار ندارند. ابتدا G_1 را در نظر می‌گیریم از آنجایی که ابعاد آن بزرگتر از یک است و با توجه به محل برشی که توسط n_1' صورت می‌گیرد می‌توان مشاهده کرد که G_1 در شرط (م) و (۲م)



شکل ۱۶: حالتی که $HP(\mathfrak{R}, s, t)$ وجود ندارد در این حالت n فرد است و m زوج است

(\mathfrak{R}, s, t) سازگار-رنگی باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که اگر یکی از شرایط (م) و (۱۰م)-(۱۲م) برقرار باشد آنگاه (\mathfrak{R}, s, t) مسیر همیلتونی ندارد.

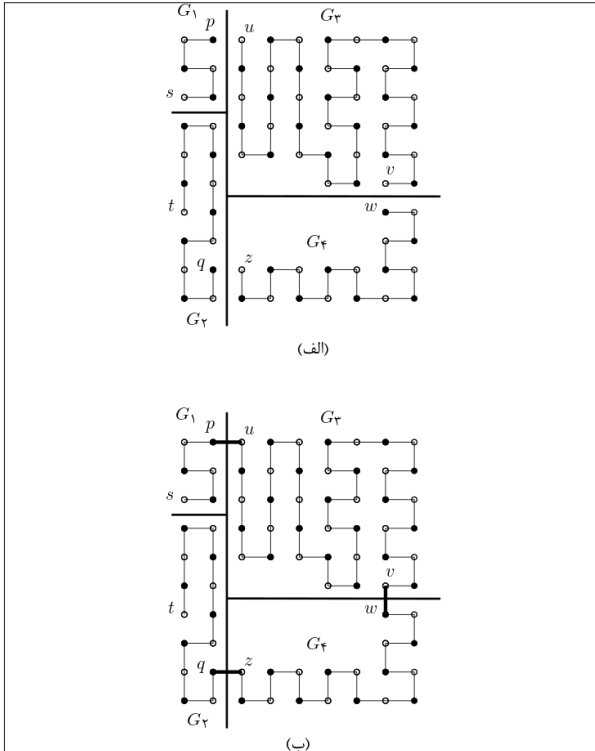
در شرط (م)، واضح است که اگر $\{s, t\}$ برش رأسی باشد، گراف ناهمبند می‌شود. بنابراین مسیر همیلتونی ندارد. در شرط (م)، چون b و d زوج هستند پس G_1 زوج است در نتیجه G_2 فرد است. در گراف‌های توری با اندازه فرد مسیر همیلتونی بین دو رأس هم‌رنگ (رنگ اکثریت) وجود دارد ولی در این حالت رأس u و v غیر هم‌رنگ هستند پس شرط سازگار-رنگی در G_2 برقرار نیست. در نتیجه در کل گراف مسیر همیلتونی وجود ندارد (شکل (۱۴) را ببینید). در شرط (۱۱م)، با شروع مسیر از رأس s همواره یکی از رؤس u و v خارج از مسیر قرار می‌گیرد. بنابراین در کل گراف مسیر همیلتونی وجود ندارد (شکل (۱۵) را ببینید). شرط (۱۲م) نیز مشابه شرط (۱۱م) اثبات می‌شود (شکل (۱۶) را ببینید).

۴. الگوریتم ساخت مسیر همیلتونی

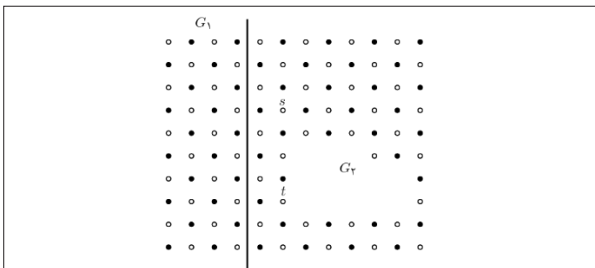
در این بخش، الگوریتم ساخت مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t در حالتی که $s_x, t_x \leq d$ و b زوج است را بیان می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم (\mathfrak{R}, s, t) سازگار-رنگی است و در شرایط ممنوعه (م) و (۱۰م)-(۱۲م) قرار ندارد.

لم ۷: فرض کنید \mathfrak{R} یک گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل باشد. فرض کنید s و t دو رأس معین در \mathfrak{R} باشد و (\mathfrak{R}, s, t) قابل قبول باشد. همچنین فرض کنید $s_x, t_x \leq d$ و $d = 2$. آنگاه $HP(\mathfrak{R}, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: فرض کنید $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ یک افزاز از



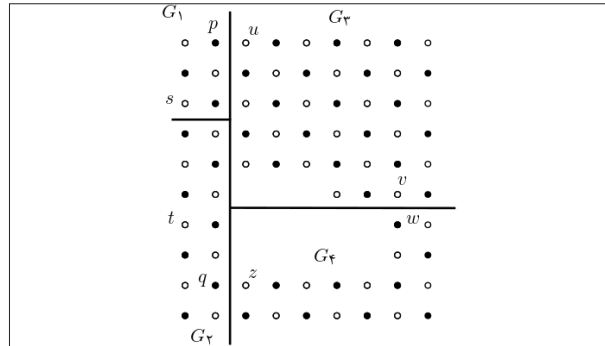
شکل ۱۸: (الف) ساخت مسیرهای همیلتونی در زیرگراف‌های مختلف (ب) ترکیب مسیرهای همیلتونی در زیرگراف‌ها و ساخت مسیر همیلتونی نهایی



شکل ۱۹: افراز کردن گراف توری به دو زیرگراف گراف توری

G_1 یک گراف توری مستطیلی با اندازه زوج است و $m, n > 1$ پس طبق لم ۳، G_1 دور همیلتونی دارد (شکل (۲۰) (الف)). در پایان با ترکیب مسیر همیلتونی در G_2 و دور همیلتونی در G_1 از طریق دو یال موازی e_1 و e_2 ، مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در (\mathfrak{R}, s, t) ساخته می‌شود (شکل (۲۰) (ب)).

حالت ۲: رأس برشی $\{s, t\}$ باشد یعنی $s = (d-1, 2)$ و $t = (d, 1)$ یا $t = (d, n)$ و $s = (d-1, n-1)$ باشد. فرض کنید $s = (d-1, 2)$ در حالتی که $s = (d-1, n-1)$ فرض کنید $(1, 1)$ مختصات رأس گوشه راست پایین باشد آنگاه به‌طور مشابه مسیر همیلتونی ساخته می‌شود. فرض کنید $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ یک افراز از گراف \mathfrak{R} باشد به‌طوری که



شکل ۱۷: افراز کردن گراف توری به چهار زیرگراف توری مجزا با مشخص کردن رئوس اتصال

قرار ندارد پس قابل قبول است. بنابر قضیه ۱ مسیر همیلتونی دارد. اثبات قابل قبول بودن G_2 نیز مشابه G_1 است. با استفاده از الگوریتم [۴] مسیر همیلتونی در G_1 و G_2 ساخته می‌شود. حال G_3 و G_4 را در نظر می‌گیریم. با یک بررسی ساده می‌توان مشاهده کرد که G_3 و G_4 (با توجه به زوج یا فرد بودن) در هیچکدام از شرایط (م ۱)، (م ۳) و (م ۵) (در صورت فرد بودن) و (م ۴) و (م ۶)–(م ۹) (در صورت زوج بودن) قرار ندارد، پس قابل قبول هستند. بنابر قضیه ۴، در G_3 و G_4 مسیر همیلتونی وجود دارد. با استفاده از الگوریتم [۸] مسیر همیلتونی در G_3 و G_4 ساخته می‌شود (شکل (۱۸) (الف) را ببینید). در پایان با اتصال p به u ، q به v و w مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود (شکل (۱۸) (ب) را ببینید).

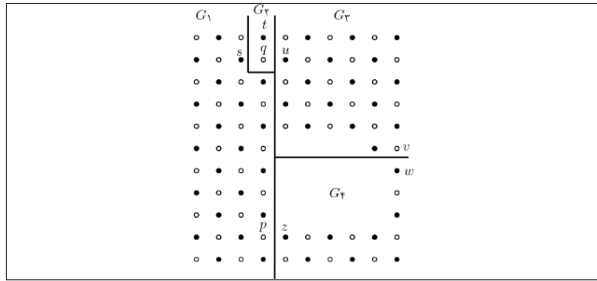
لم ۸: فرض کنید \mathfrak{R} یک گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل باشد. فرض کنید s و t دو رأس معین در \mathfrak{R} باشد و (\mathfrak{R}, s, t) قابل قبول باشد. همچنین فرض کنید $d > 2$ ، $s_x, t_x \leq d$ و $s_x, t_x > 2$. آنگاه $HP(\mathfrak{R}, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: فرض کنید $\{G_1, G_2\}$ یک افراز از گراف \mathfrak{R} باشد، به‌طوری که $G_1 = R(m_1, n)$ ، $G_2 = \mathfrak{R} \setminus G_1$ و $m_1 = s_x - 1$ اگر s_x فرد باشد؛ در غیر این صورت $m_1 = s_x - 2$. در اینجا $s, t \in G_2$ (شکل (۱۹)). حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $\{s, t\}$ برش رأسی نباشد.

در این حالت، بر اساس لم ۷ مسیر همیلتونی در (G_2, s, t) ساخته می‌شود (شکل (۲۰) (الف)).

چون d زوج است بنابراین $d - 2$ زوج است. همچنین چون



شکل ۲۱: افراز کردن گراف توری به چهار زیرگراف توری مجزا

از آنجایی که G_1 زوج است، با یک بررسی ساده می‌توان مشاهده کرد که در هیچکدام از شرایط (م۴) و (م۶) - (م۹) ندارد، بنابراین قابل قبول است. بنابر قضیه ۴ مسیر همیلتونی دارد. حال G_2 را در نظر می‌گیریم. چون t و q رئوس انتهایی G_2 هستند بنابراین در شرط (م۱) و (م۲) قرار ندارد، پس قابل قبول است. بنابر قضیه ۱ مسیر همیلتونی دارد. اثبات قابل قبول بودن G_3 و G_4 مشابه لم ۷ است. در نتیجه با استفاده از الگوریتم [۸] مسیر همیلتونی در G_1 ، G_3 و G_4 ساخته می‌شود، همچنین با استفاده از الگوریتم [۴] مسیر همیلتونی در G_2 ساخته می‌شود (شکل (۲۲) الف)). در پایان با اتصال مسیرها به یکدیگر از طریق رئوس اتصال مشابه لم ۷ مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود (شکل (۲۲) ب)).

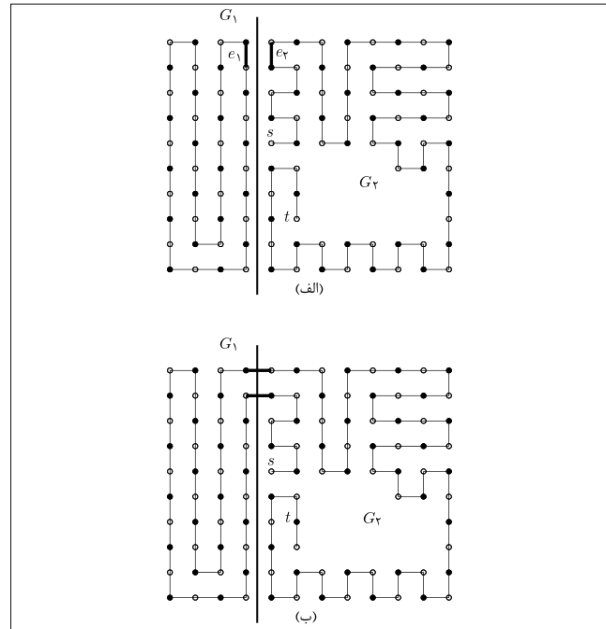
لم ۹: فرض کنید \mathfrak{R} یک گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل باشد. فرض کنید s و t دو رأس معین در \mathfrak{R} باشد و (\mathfrak{R}, s, t) قابل قبول باشد. همچنین فرض کنید $d > 2$ ، $s_x \leq 2$ و $t_x > 2$. آنگاه $HP(\mathfrak{R}, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: فرض کنید $\{G_1, G_2\}$ یک افراز از گراف \mathfrak{R} باشد، به طوری که $G_1 = R(m_1, n)$ ، $G_2 = \mathfrak{R} \setminus G_1$ و $m_1 = 2$ باشد (شکل (۲۳)). همچنین فرض کنید $s, p \in G_1$ و $q, t \in G_2$ و $p \sim q$. رأس اتصال p به صورت زیر به دست می‌آید. در اینجا اگر s و t سیاه باشند، آنگاه p به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p = \begin{cases} (m_1, n) & \text{if } n = \text{even}, t \neq (m_1 + 1, n) \\ (m_1, n - 1) & \text{if } n = \text{odd}, t \neq (m_1 + 1, n - 1) \\ (m_1, 2) & \text{if } s \neq (1, 2), t = (m_1 + 1, n) \\ (m_1, 4) & \text{if } s = (1, 2), t = (m_1 + 1, n) \end{cases}$$

در غیر این صورت p به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$p = \begin{cases} (m_1, 1) & \text{if } t \neq (m_1 + 1, 1) \\ (m_1, 3) & \text{if } s \neq (1, 3), t = (m_1 + 1, 1) \\ (m_1, 5) & \text{if } s = (1, 3), t = (m_1 + 1, 1) \end{cases}$$



شکل ۲۰: (الف) ساخت مسیر همیلتونی در G_2 و ساخت دور همیلتونی در G_1 و (ب) ترکیب کردن مسیر همیلتونی و دور همیلتونی با استفاده از دو بال موازی e_1 و e_2

$$G_1 = L(d, n; 1, t_y + 1)$$

$$G_2 = R(1, t_y + 1)$$

$$G_3 = L(m - d, a + l; m_2, l)$$

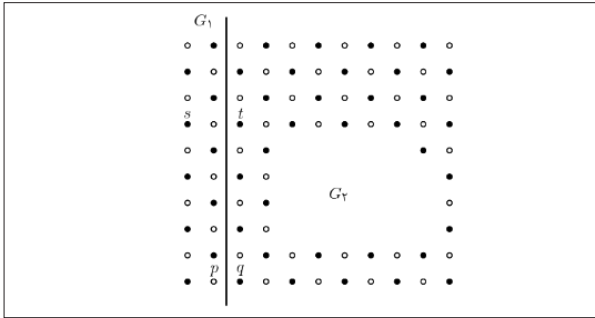
و

$$G_4 = L(m - d, n - a - l; m_1, n_2)$$

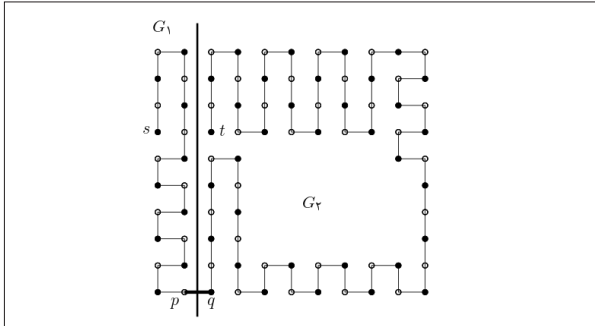
فرض کنید $e_1, p \in G_1$ ، $s, q, t \in G_2$ ، $u, v \in G_3$ و $w, z \in G_4$ به

طوری که $v \sim w$ و $q \sim u$ ، $p \sim z$ باشد (شکل (۲۱)).

از آنجایی که $t_y + 1 = 2$ و d است بنابراین G_1 و G_2 هر دو زوج هستند. اثبات زوج یا فرد بودن G_3 و G_4 مشابه لم ۷ است. رئوس اتصال p, q و v به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $x_1 = (d, n)$. چون G_1 زوج است بنابراین اگر s و x_1 هم‌رنگ باشند آنگاه رأس اتصال $p = (d, n - 1)$ در غیر این صورت $q = (d, n)$ است. همچنین $q = (d, 2)$. رأس اتصال v نیز مشابه لم ۷ تعریف می‌شود. حال نشان می‌دهیم که (G_1, s, p) ، (G_2, q, t) ، (G_3, u, v) و (G_4, w, z) قابل قبول هستند. با توجه به مختصات p, q, u, v, w, z به وضوح می‌توان مشاهده کرد که شرط سازگار-رنگی در G_1, \dots, G_4 برقرار است. حال باید ثابت کنیم که هیچکدام از زیرگراف‌ها در شرایط ممنوعه قرار ندارند. ابتدا G_1 را در نظر می‌گیریم



شکل ۲۳: افراز کردن گراف توری به دو زیرگراف توری مجزا

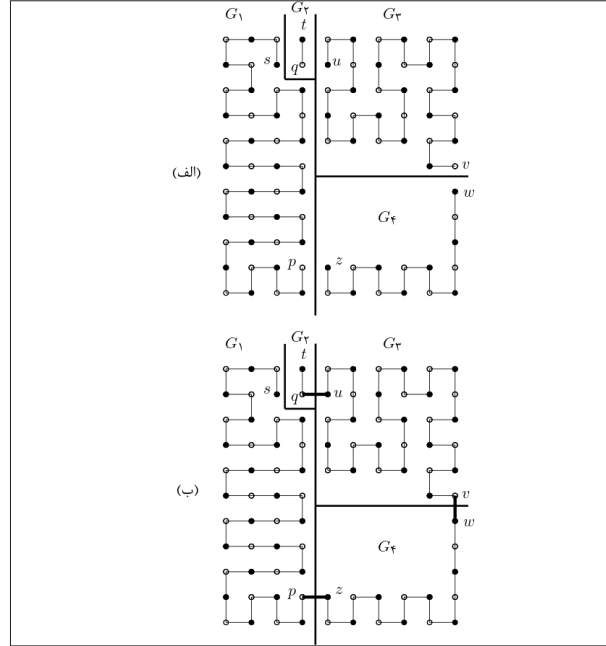


شکل ۲۴: ساخت مسیر همیلتونی در (G_1, s, p) و (G_2, q, t) و ترکیب کردن دو مسیر همیلتونی از طریق دو رأس اتصال p و q

در این جا، $m_1 = d - 2$ و $n_1 = t_y - 1$ اگر $t = (1, n - 1)$ ؛ در غیر این صورت $n_1 = s_y$. فرض کنید $p \in G_1, s, q, t \in G_2, u, v \in G_3$ که $q \sim v, p \sim u$ (شکل ۲۵) را ببینید).

چون $m_1 = d - 2$ زوج است بنابراین G_1 و G_2 زوج هستند و این نتیجه می‌دهد که G_3 فرد است. رئوس اتصال p و q مشابه لم γ تعریف می‌شود. حال نشان می‌دهیم که (G_1, s, p) ، (G_2, q, t) و (G_3, u, v) قابل قبول هستند. با توجه به مختصات p و q می‌توان مشاهده کرد که شرط سازگار-رنگی در G_1 ، G_2 و G_3 برقرار است. کافی است نشان دهیم که در شرایط ممنوعه قرار ندارند. G_1 و G_2 مشابه لم γ ثابت می‌شود که در شرایط (م ۱) و (م ۲) قرار ندارند پس قابل قبول هستند. بنابر قضیه ۱، در (G_1, s, p) و (G_2, q, t) مسیر همیلتونی وجود دارد. در نتیجه با استفاده از الگوریتم [۴]، مسیر همیلتونی در (G_1, s, p) و (G_2, q, t) ساخته می‌شود. همچنین مسیر همیلتونی در (G_3, u, v) به صورت بازگشتی ساخته می‌شود. در پایان با اتصال رئوس p به u و q به v مسیر همیلتونی در (\mathcal{R}, s, t) ساخته می‌شود.

قضیه ۱۱: $HP(\mathcal{R}, s, t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر (\mathcal{R}, s, t)



شکل ۲۲: (الف) ساخت مسیر همیلتونی در زیرگراف‌های مختلف و (ب) ترکیب کردن مسیرهای همیلتونی و ساخت مسیر همیلتونی نهایی

چون $d - 2$ زوج است بنابراین G_1 زوج است. در نتیجه G_2 فرد است. با توجه به مختصات رأس اتصال p می‌توان مشاهده کرد که شرط سازگار-رنگی در G_1 برقرار است. همچنین با یک بررسی ساده به وضوح می‌توان مشاهده کرد که (G_1, s, p) در شرط (م ۱) و (م ۲) قرار ندارد، پس قابل قبول است. بنابر قضیه ۱، (G_1, s, p) مسیر همیلتونی دارد. با استفاده از الگوریتم [۴] مسیر همیلتونی در (G_1, s, p) ساخته می‌شود. به صورت بازگشتی مسیر همیلتونی در G_2 ساخته می‌شود. در پایان با اتصال رئوس p و q به یکدیگر، مسیر همیلتونی در (\mathcal{R}, s, t) ساخته می‌شود (شکل ۲۴)).

لم ۱۰: فرض کنید \mathcal{R} یک گراف توری مستطیلی با یک حفره L-شکل باشد. فرض کنید s و t دو رأس معین در \mathcal{R} باشد و (\mathcal{R}, s, t) قابل قبول باشد. همچنین فرض کنید $d > 2$ و $s_x, t_x \leq 2$. آنگاه $HP(\mathcal{R}, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: بدون کاستن از کلیت فرض کنید $s_y < t_y$. فرض کنید

$\{G_1, G_2, G_3\}$ یک افراز از گراف \mathcal{R} باشد به طوری که

$$G_1 = R(m_1, n_1)$$

$$G_2 = R(m_1, n - n_1)$$

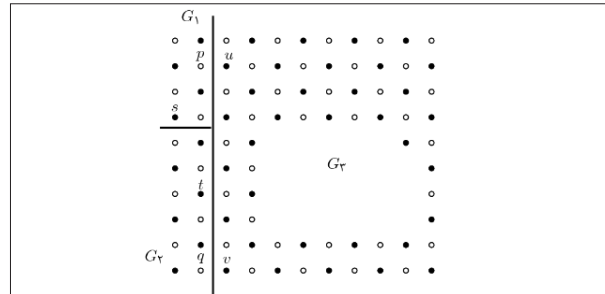
$$G_3 = \mathcal{R} \setminus (G_1 \cup G_2)$$

۵. نتیجه گیری

مسئله مسیر همیلتونی یکی از مسائل معروف در نظریه گراف است که در حالت کلی NP -کامل است و برای تعداد کمی از رده‌های گراف این مسئله حل شده است. در این مقاله، مسئله مسیر همیلتونی برای گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره L -شکل که اندازه کل گراف فرد است، d زوج است را بررسی کردیم. ابتدا نشان دادیم که در چه شرایطی بین دو رأس معین مسیر همیلتونی وجود ندارد. سپس برای حالت‌هایی که در گراف بین دو رأس معین مسیر همیلتونی وجود دارد الگوریتمی برای ساخت مسیر ارائه کردیم.

۶. مراجع

- [1] S.M. Bhandarkar, H.R. Arabnia, "Parallel computer vision on a reconfigurable multiprocessor network", IEEE Trans Parallel Distrib Syst, 8(3), pp. 292-309, 1997.
- [2] M.R. Garey, D.S. Johnson, and R.E. Tarjan, "Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, 1979.
- [3] S.S. Ray, "Graph theory with algorithms and applications: in applied science and technology", Springer, Berlin, 2013.
- [4] A. Itai, C. Papadimitriou, and J. Szwarcfiter, "Hamiltonian path in grid graphs", SIAM Journal Computing, 11(4), pp. 676-686, 1982.
- [5] M.R. Garey, D.S. Johnson, and R.E. Tarjan, "The planar Hamiltonian circuit problem is NP-Complete", SIAM Journal on Computing, 5, pp. 704-714, 1976.
- [6] S.D. Chen, H. Shen, and R. Topor, "An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshes", Parallel Comput., 28(9), pp. 1293-1305, 2002.
- [7] F. Keshavarz-Kohjerdi, and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in some classes of grid graphs", J. Appl Math. doi:10.1155/2012/475087, 2012.
- [8] F. Keshavarz-Kohjerdi, and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in L-shaped grid graphs", Theoretical Computer Science, 621, pp. 37-56, 2016.
- [9] F. Keshavarz-Kohjerdi, and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian (s,t)-paths in odd-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole", Journal of Supercomputing, vol 73, pp. 3821-3860, 2017.
- [10] F. Keshavarz-Kohjerdi, and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian (s,t)-paths in even-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole", Theoretical Computer Science, vol. 690, pp. 26-58, 2017.
- [11] F. Keshavarz-Kohjerdi, and A. Bagheri, "Linear-time algorithms for finding Hamiltonian and longest (s, t)-paths in C-shaped grid graphs", Discrete Optim, 2020
- [12] M. Gharibolooki, F. Keshavarz-Kohjerdi, A Hamiltonian path problem in odd-size rectangular grid graphs with a L-shaped hole, i4c2019, pp. 365-375, 2019. (In Persian).



شکل ۲۵: افراز کردن گراف توری به سه زیرگراف توری مجزا

قابل قبول باشد.

قضیه ۱۲: اگر $HP(\mathcal{R}, s, t)$ وجود داشته باشد، آنگاه مسیر همیلتونی بین s و t در زمان خطی پیدا می‌شود. اثبات: الگوریتم ابتدا در زمان $O(1)$ گراف توری \mathcal{R} را به تعدادی زیرگراف توری مستطیلی و L -شکل افراز می‌کند (بنابر لم‌های ۷ تا ۱۰). در هر زیرگراف مسیر همیلتونی یا دور همیلتونی در زمانی خطی، بنابر قضایای ۲ و ۵، ساخته می‌شود. سپس در زمان $O(1)$ جواب زیرگراف‌ها با هم ترکیب می‌شود. بنابراین، مسیر همیلتونی بین s و t در زمان خطی بر حسب اندازه گراف ساخته می‌شود. شبه کد الگوریتم، در الگوریتم ۱ بیان شده است.

الگوریتم ۱: الگوریتم مسیر همیلتونی

- ۱- ورودی: گراف توری مستطیلی با یک حفره L -شکل و دو رأس معین s و t
- ۲- خروجی: مسیر همیلتونی بین s و t
- ۳- اگر (\mathcal{R}, s, t) در یکی از شرایط (م ۱)، (م ۱۰)، (م ۱۱) و (م ۱۲) صدق کند، آنگاه $HP(\mathcal{R}, s, t)$ وجود ندارد.
- ۴- در غیر این صورت اگر $d = 2$ و $s_x, t_x \leq d$ باشد، آنگاه طبق لم ۷ مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود.
- ۶- اگر $d > 2$ و $s_x, t_x \leq d$ و $s_x, t_x > 2$ باشد، آنگاه طبق لم ۸ مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود.
- ۷- اگر $d > 2$ و $s_x, t_x \leq d$ ، $s_x \leq 2$ و $t_x > 2$ باشد، آنگاه طبق لم ۹ مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود.
- ۸- اگر $d > 2$ و $s_x, t_x \leq d$ و $s_x, t_x \leq 2$ باشد، آنگاه طبق لم ۹ مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود.