

تحلیل و پردازش سیگنال به کمک روش‌های زمان-فرکانس

محمد مهدی علیان نژادی*

دانشجوی دکتری، آزمایشگاه پردازش تصویر و داده کاوی - دانشگاه صنعتی شاهرود - شاهرود - ایران

پست الکترونیکی: alyan.nezhadi@shahroodut.ac.ir

حمید حسن پور

استاد، آزمایشگاه پردازش تصویر و داده کاوی - دانشگاه صنعتی شاهرود - شاهرود - ایران

پست الکترونیکی: h.hassanpour@shahroodut.ac.ir

چکیده: در مقاله حاضر مروری بر روش‌های تحلیل و پردازش زمان-فرکانس سیگنال با تأکید بر بهبود توزیع‌های زمان-فرکانس انجام می‌گیرد. نمایش سیگنال در حوزه فرکانس به دلیل عدم توانایی بازنمایی تغییرات فرکانسی در طول زمان، برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا کارآمدی لازم را ندارد؛ در نتیجه نیاز به یک توزیع با توانایی بازنمایی تغییرات فرکانسی نسبت به زمان وجود دارد. توزیع‌های زمان-فرکانس به خوبی این تغییرات سیگنال‌ها را نشان می‌دهند. در این مقاله، ضرورت استفاده از تحلیل و پردازش زمان-فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است. روش‌های پایه تحلیل و پردازش زمان-فرکانس سیگنال دارای ویژگی‌ها و محدودیت‌هایی هست و شناخت دقیق‌تر آن‌ها می‌تواند: (1) هدف آینده این حوزه دانش را تعیین نماید، و (2) کاربردهای آن را در حوزه‌های مختلف مهندسی مشخص سازد. در منابع علمی موجود به دو ویژگی تفکیک‌پذیری¹ توام فرکانسی و زمانی، و عدم وجود عبارات متقاطع توجه زیادی شده است. در این مقاله، به سنجش فشرده توزیع زمان-فرکانس سیگنال به عنوان یکی از موضوعات جدید و پیشرفته در حوزه تحلیل زمان-فرکانس سیگنال پرداخته شده است. سنجش فشرده روش‌های زمان-فرکانس سیگنال باعث کاهش عبارات متقاطع و کاهش حساسیت روش‌ها به نوفه² می‌شود. همچنین در بخش پایانی مقاله، معیارهای ارزیابی توزیع‌های زمان-فرکانس سیگنال مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: توزیع زمان-فرکانس سیگنال، سنجش فشرده توزیع زمان-فرکانس سیگنال، معیار ارزیابی توزیع زمان-فرکانس سیگنال، عبارات متقاطع، سیگنال تحلیلی.

1. مقدمه

بازنمایی در حوزه زمان و بازنمایی در حوزه فرکانس، دو روش کلاسیک برای بازنمایی سیگنال می‌باشند. در هر یک از این دو روش، متغیرهای زمان و فرکانس به صورت مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرند [1, 2]. در حوزه زمان، میانگینی از مقادیر بازنمایی در حوزه فرکانس (رابطه 1)؛ و در حوزه فرکانس، میانگینی از مقادیر بازنمایی در حوزه زمان محاسبه می‌شود (رابطه 2). به همین دلیل تغییرات فرکانس سیگنال در طول زمان در حوزه فرکانس مشهود نیست. در روش‌های زمان-فرکانس امکان بازنمایی و تحلیل همزمان سیگنال به طور همزمان در حوزه زمان و فرکانس وجود دارد.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

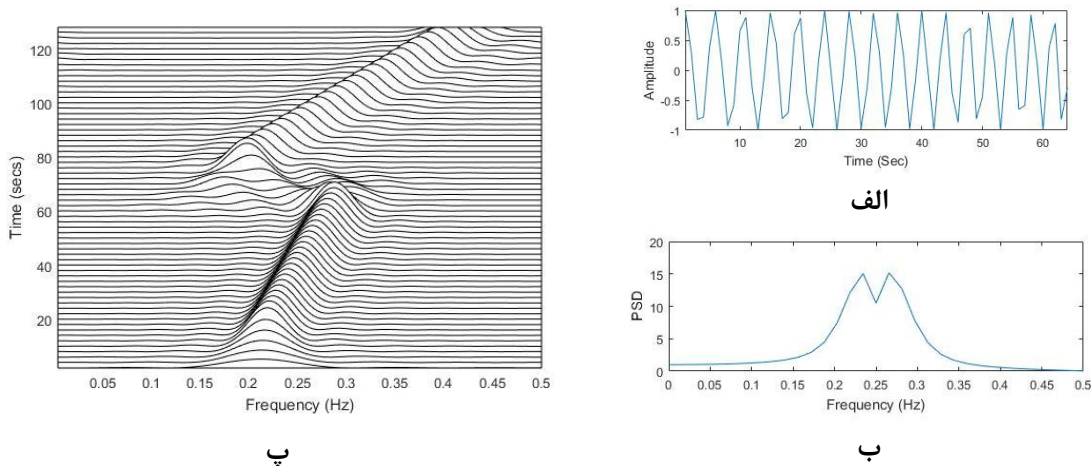
شکل 1 یک سیگنال دو مؤلفه‌ای را در سه حوزه زمان، فرکانس و زمان-فرکانس نشان می‌دهد. هر دو مؤلفه این سیگنال خطی بوده و به ترتیب دارای فرکانس‌های شروع 0/2 و 0/15 هرتز و فرکانس‌های پایان 0/3 و 0/35 هرتز می‌باشد. همان‌طور که در این شکل

* نویسنده مسئول

¹ Resolution

² Noise

مشخص است، طیف چگالی توان تغییرات فرکانسی سیگنال را در طول زمان، و دو مولفه موجود در آن را نشان نمی‌دهد. توزیع‌های زمان-فرکانس به خوبی این دو مشکل حوزه فرکانس را مرتفع ساخته‌اند (شکل 1-پ).



شکل 1: یک سیگنال دو مؤلفه‌ای غیرایستا؛ الف: نمایش در حوزه زمان، ب: نمایش در حوزه فرکانس، پ: نمایش در حوزه زمان-فرکانس.

بیشتر سیگنال‌های واقعی، غیر ایستا و متغیر با زمان هستند [3, 4]. مطالعه چنین سیگنال‌هایی در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس به صورت مجزا امکان‌پذیر نیست. تحلیل زمان - فرکانس با نمایش همزمان فرکانس و زمان اطلاعات مفیدی را از رفتار سیگنال نمایش می‌دهد. [4, 5]. برای همین منظور، از تحلیل زمان-فرکانس سیگنال در موضوعات و مسائل مختلفی مانند تفکیک کور منابع^۳ [6]، شناسایی تشنج از روی سیگنال‌های مغزی [7-9] و حذف نوفه [10] استفاده می‌شود. نرم‌افزار TFSAP تحت متلب برای تحلیل و پردازش زمان-فرکانس سیگنال ارائه شده است [11]. این ابزار دارای رابط کاربری گرافیکی بسیار ساده‌ای است. علاوه بر آن از توابع TFSAP در کدهای متلب نیز می‌توان استفاده کرد. این نرم‌افزار از طریق نشانی معرفی شده در [12] به صورت رایگان قابل بارگیری و نصب بر روی رایانه‌های شخصی می‌باشد. بخش دوم این مقاله مربوط به توزیع‌های زمان-فرکانس است. این بخش شامل فرکانس آنی سیگنال، توزیع‌های زمان-فرکانس خطی و توزیع‌های زمان-فرکانس درجه دوم و توزیع‌های مبتنی بر هسته است. بخش سوم مقاله به معرفی سنجش فشرده توزیع زمان-فرکانس سیگنال می‌پردازد. معیارهای ارزیابی توزیع‌های زمان-فرکانس در بخش چهارم آمده است. نهایتاً بخش پنجم مقاله شامل بحث و نتیجه‌گیری است.

2. توزیع‌های زمان-فرکانس

همانگونه که قبلاً نیز اشاره شد، روش‌های زمان-فرکانس برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا معرفی شدند. روش‌های موجود برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا را می‌توان در سه دسته کلی فرکانس آنی، توزیع‌های خطی و درجه دوم تقسیم‌بندی نمود.

2-1 فرکانس آنی

چنانچه سیگنال غیرایستا تک مؤلفه‌ای باشد (تنها دارای یک مؤلفه فرکانسی باشد) و انرژی سیگنال بیشتر از نوفه موجود در آن باشد، محاسبه فرکانس آنی روش خوبی برای تحلیل سیگنال خواهد بود. فرکانس آنی یک سیگنال تک مؤلفه‌ای به صورت مشتق فاز سیگنال تعریف می‌شود [1]:

$$IF(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Q(t) \quad (3)$$

در رابطه فوق، $Q(t)$ فاز سیگنال در لحظه t است. این رابطه فقط برای سیگنال‌های تک مؤلفه‌ای کارآمد است.

اخیراً روشی از ترکیب پردازش تصویر و توزیع زمان-فرکانس برای محاسبه فرکانس آنی سیگنال پیشنهاد شده است. در این روش در مرحله اول، از روی مشتق توزیع زمان-فرکانس سیگنال، فرکانس آنی مرتبط با بخش‌های غیرهمپوشان مؤلفه‌های سیگنال استخراج

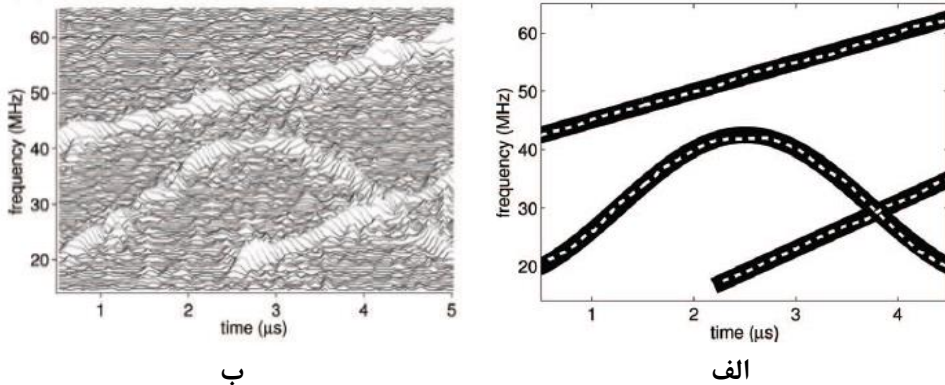
³ Blind Source Separation(BSS)

می‌شود. در مرحله بعد، از روی فرکانس‌های آنی محاسبه شده و با کمک میدان‌های تصادفی مارکوف⁴، فرکانس‌های آنی مابقی نقاط سیگنال تخمین زده می‌شود. شکل 2 تخمین فرکانس آنی یک سیگنال چند مؤلفه‌ای با همپوشانی مؤلفه‌های فرکانسی در حضور نوفه شدید را نشان می‌دهد [13].

برای محاسبه فرکانس آنی سیگنال چند مؤلفه‌ای می‌توان سیگنال را به مؤلفه‌های سازنده آن تجزیه نمود و سپس از روش موجود برای محاسبه فرکانس آنی سیگنال‌های تک مؤلفه‌ای استفاده نمود [14]. این روش در مورد سیگنال‌های چند مؤلفه‌ای که مؤلفه‌ها با یکدیگر تداخل دارند، کارا نیست [15].

به طور کلی، روش‌های تخمین فرکانس آنی سیگنال‌های چند مؤلفه‌ای به سه گروه تقسیم می‌شوند [13, 16]. گروه اول، روش‌هایی هستند که از مشتق فاز سیگنال استفاده می‌کنند [14]. این گروه از روش‌ها به وجود نوفه حساس هستند. گروه دوم، روش‌هایی هستند که تعداد نقاط صفر سیگنال را محاسبه می‌کنند و فرکانس سیگنال را برابر نصف فرکانس نقاط صفر در نظر می‌گیرند [16]. روش‌های گروه دوم، فقط برای سیگنال‌هایی مناسب هستند که بتوان آن‌ها را به صورت تکه‌ای ایستا تصور کرد. روش‌های گروه سوم، مبتنی بر توزیع‌های زمان-فرکانس هستند. روش‌های این گروه از توزیع‌هایی مانند توزیع ویگنر-وایل برای محاسبه فرکانس آنی استفاده می‌کنند. از آنجایی که این روش‌ها برای محاسبه فرکانس آنی سیگنال‌های غیر ایستای نوفه‌ای مناسب‌تر هستند، بیشتر مطالعات فرکانس آنی مربوط به این گروه می‌باشد [13, 15, 17-19].

فرکانس آنی سیگنال در موارد زیادی مانند تحلیل و پردازش سیگنال‌های EEG، سونار، آکوستیک زیر آب و گفتار مورد استفاده قرار می‌گیرند [16]. اگرچه تحلیل به کمک فرکانس آنی سیگنال در موارد زیادی رفتار سیگنال را نشان می‌دهد ولی همه جزئیات سیگنال را بازنمایی نمی‌کند. همچنین پیچیدگی زمانی روش‌های محاسبه توزیع فرکانس آنی سیگنال‌های چند مؤلفه‌ای مقاوم به نوفه بالا می‌باشد [13, 15, 17-19]. از همین رو، نیاز به تحلیل‌هایی با پیچیدگی زمانی کمتر و بازنمایی کامل‌تر احساس می‌شود. توزیع‌های زمان-فرکانس خطی و درجه دوم، روش‌هایی برای بازنمایی جزئیات بیشتر هستند.



شکل 2: نمایش زمان-فرکانس یک سیگنال چند مؤلفه‌ای؛ الف: فرکانس آنی سیگنال، ب: توزیع B سیگنال [13]

2-2- توزیع‌های خطی

توزیع‌های زمان-فرکانس خطی، سیگنال را از حوزه زمان به صفحه دو بعدی زمان-فرکانس نگاشت می‌دهند. خطی بودن، یکی از ویژگی‌های مطلوب در سیستم‌هایی است که با سیگنال‌های چند مؤلفه‌ای کار می‌کنند. توزیع زمان فرکانس $TF_g(t, \omega)$ خطی است اگر و تنها اگر، توزیع زمان-فرکانس سیگنال $g(t)$ که از دو مؤلفه تشکیل شده است، برابر مجموع توزیع‌های زمان-فرکانس مؤلفه‌های سازنده آن باشد؛ به عبارت دیگر

$$g(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (4)$$

$$TF_g(t, \omega) = TF_{s_1(t)}(t, \omega) + TF_{s_2(t)}(t, \omega) \quad (5)$$

دو توزیع زمان-فرکانس خطی پرکاربرد، تبدیل فوریه زمان کوتاه و تبدیل گابور می‌باشد. توزیع‌های خطی در موارد زیادی مانند استخراج رفتار کلی سیگنال، تشخیص اثر انگشت و تفکیک کور منابع استفاده می‌شود [11].

⁴ Markov Random Field(MRF)

سیگنال $s(t)$ با پنجره حقیقی و زوج $w(\tau)$ را در نظر بگیرید. $s_w(t, \tau)$ طیف محلی سیگنال $s(t)$ در لحظه $(t = \tau)$ بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$s_w(t, \tau) = s(\tau)w(\tau - t) \quad (6)$$

تبدیل فوریه زمان کوتاه سیگنال، همان تبدیل فوریه طیف محلی سیگنال است؛ به عبارت دیگر [1]:

$$F_s^w(t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}\{s(\tau)w(\tau - t)\} \quad (7)$$

که در آن $F_s^w(t, \omega)$ تبدیل فوریه زمان کوتاه سیگنال $s(t)$ است. تبدیل گابور یک سیگنال همان تبدیل فوریه زمان کوتاه با یک پنجره گوسین است:

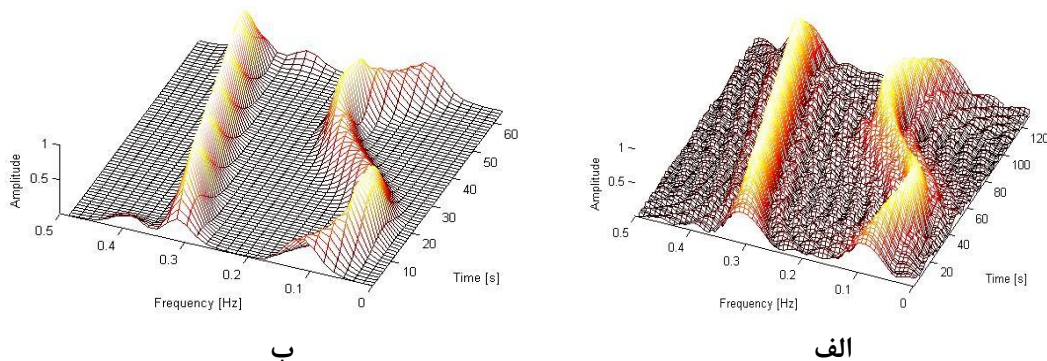
$$GT_s(t, \omega) = \int h(\tau - t)s(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (8)$$

در رابطه فوق $GT_s(t, \omega)$ تبدیل گابور سیگنال $s(t)$ با پنجره گوسین $h(\tau)$ است. صفحه زمان-فرکانس حاصل از تبدیل گابور ساختار کلی مؤلفه‌های سیگنال را در صفحه زمان-فرکانس مشخص می‌کند. اگر سیگنال $s(t)$ از N مؤلفه s_i تشکیل شده باشد، آنگاه تبدیل گابور کل سیگنال برابر مجموع تبدیل گابور مؤلفه‌های سیگنال است:

$$GT_s(t, \omega) = \sum_{i=1}^N GT_{s_i}(t, \omega) \quad (9)$$

شکل 3 دو توزیع زمان-فرکانس خطی گابور و STFT با پنجره مستطیلی را از یک سیگنال دو مؤلفه‌ای نشان می‌دهد. شکل 3 نقش پنجره را در توزیع STFT نشان می‌دهد. شایان ذکر است توزیع گابور همان توزیع STFT با پنجره گوسین است. پنجره مستطیلی باعث ایجاد اعوجاج در صفحه زمان-فرکانس می‌شود.

تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی در تبدیل فوریه زمان کوتاه و تبدیل گابور رابطه عکس دارند؛ به عبارت دیگر هر چه تفکیک‌پذیری فرکانسی توزیع افزایش یابد، تفکیک‌پذیری زمانی آن کاهش می‌یابد و برعکس. بر اساس اصل عدم قطعیت، رسیدن به تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی کامل در تبدیل فوریه زمان کوتاه امکان‌پذیر نیست. به طور کلی توزیع‌های زمان-فرکانس خطی نمی‌توانند همزمان تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی بالایی داشته باشند [20]. توزیع‌های درجه دوم، توزیع‌هایی با تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی بالا هستند.



شکل 3: دو نوع توزیع زمان-فرکانس خطی از یک سیگنال دو مؤلفه‌ای؛ الف: توزیع STFT با پنجره مستطیلی، ب: توزیع گابور

3-2-2 توزیع‌های درجه دوم

توزیع‌های درجه دوم، توزیع‌هایی هستند که یک سیگنال را از حوزه زمان به صفحه چگالی انرژی نگاهت می‌دهند. اگرچه روش‌های درجه دوم خطی نیستند ولی همزمان تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی بالایی دارند. از آنجایی که توزیع‌های زمان-فرکانس درجه دوم، صفحه چگالی انرژی سیگنال را تولید می‌کنند، سه ویژگی زیر برای آن‌ها مطلوب است: (1) مجموع تمام صفحه زمان-فرکانس سیگنال برابر با انرژی سیگنال باشد (رابطه 10)؛ (2) انتگرال در راستای فرکانس از صفحه زمان-فرکانس سیگنال برابر توان سیگنال باشد (رابطه 11)؛ (3) انتگرال در راستای زمان در صفحه زمان-فرکانس سیگنال برابر چگالی انرژی طیف سیگنال باشد (رابطه 12) [1, 21]. شایان

ذکر است که ویژگی‌های دوم و سوم (که به عنوان ویژگی‌های حاشیه‌ای⁵ مطرح می‌شوند) حاوی اطلاعاتی در مورد انرژی سیگنال در نقطه (t, ω) نیستند [21].

$$E = \iint WD(t, \omega) dt d\omega \quad (10)$$

$$|s(t)|^2 = \int TF_{s(t)}(t, \omega) d\omega \quad (11)$$

$$|s(\omega)|^2 = \int TF_{s(t)}(t, \omega) dt \quad (12)$$

توزیع‌های درجه دو در موارد بسیاری مانند تفکیک کور منابع [6]، حذف نوفه [10] و تشخیص تشنج کاربرد [8] دارد.

در ادامه این بخش دو توزیع درجه دوم ویگنر و ویگنر-وایل معرفی شده است. از آنجایی که این دو توزیع همزمان تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی بالایی دارند و سه ویژگی مطلوب قبلی را دارا می‌باشند، نقش مهمی در مطالعات زمان-فرکانس دارند. توزیع زمان-فرکانس ویگنر-وایل اساس بیشتر توزیع‌های جدید را تشکیل می‌دهد. توزیع ویگنر سیگنال $s(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [22].

$$WD_s(t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \left\{ s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} \quad (13)$$

که در آن $s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ همان تابع خودهمبستگی لحظه‌ای⁶ سیگنال است و تبدیل فوریه آن به خاطر متقارن بودن در فضای هرمیتی، حقیقی است. به عبارت دیگر توزیع ویگنر یک سیگنال، حقیقی است [1].

اگر چه توزیع ویگنر همزمان تفکیک‌پذیری زمانی و فرکانسی بالایی دارد ولی عبارات متقاطع تولید می‌کند که باعث ایجاد اعوجاج در صفحه زمان-فرکانس می‌شود [1, 2]. فرض کنید سیگنال $\delta(t)$ از N مؤلفه تشکیل شده باشد، یعنی

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) \quad (14)$$

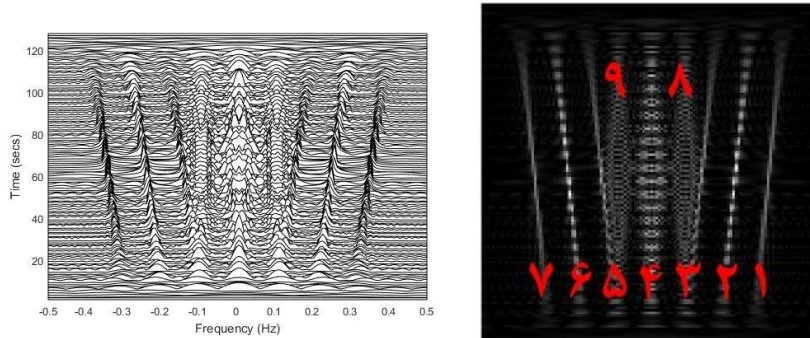
اگر $s_{i,p}$ و $s_{i,n}$ به ترتیب فرکانس‌های مثبت و منفی مؤلفه s_i باشد، آنگاه تبدیل ویگنر سیگنال $\delta(t)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$WD_{\delta}(t, \omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha \in \{p,n\}} WD_{s_{i,\alpha}}(t, \omega) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha \in \{p,n\}} \sum_{\beta \in \{p,n\}} \sum_{i>j} WD_{s_{i,\alpha}s_{j,\beta}}^I(t, \omega) \quad (15)$$

که در آن $WD_{s_{i,\alpha}}(t, \omega)$ تبدیل زمان-فرکانس $s_{i,\alpha}$ (بخش مطلوب توزیع زمان-فرکانس)، و $WD_{s_{i,\alpha}s_{j,\beta}}^I(t, \omega)$ عبارت متقاطع خارجی بین $s_{j,\beta}$ و $s_{i,\alpha}$ می‌باشد. $WD_{s_{i,\alpha}s_{j,\beta}}^I(t, \omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$WD_{s_{i,\alpha}s_{j,\beta}}^I(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} WVD_{s_{i,\alpha}s_{j,\beta}}(t, \omega) + WVD_{s_{j,\beta}s_{i,\alpha}}(t, \omega) \quad (16)$$

شکل 4 توزیع ویگنر یک سیگنال دو مؤلفه‌ای را نشان می‌دهد. بخش‌های مشخص شده با شماره 2 و 6 به ترتیب عبارات متقاطع بین مؤلفه‌های 1 و 3 و همچنین 5 و 7 سیگنال می‌باشند. بخش 4 عبارت متقاطع خارجی مضاعف حاصل از مؤلفه‌های 3 و 5 و همچنین مؤلفه‌های 1 و 7 است؛ به عبارت دیگر بخش 4 شامل دو عبارت متقاطع است که در یک نقطه از صفحه ایجاد شده است. بخش 8 عبارت متقاطع بین مؤلفه‌های 1 و 5 و همچنین بخش 9 عبارت متقاطع بین مؤلفه‌های 3 و 7 است.



شکل 4: وجود عبارات متقاطع خارجی در توزیع ویگنر؛ بخش‌های 1، 3، 5 و 7 مؤلفه‌های سیگنال و بخش‌های 2، 4، 6، 8 و 9 عبارات متقاطع خارجی هستند.⁷

⁵ Marginal Property

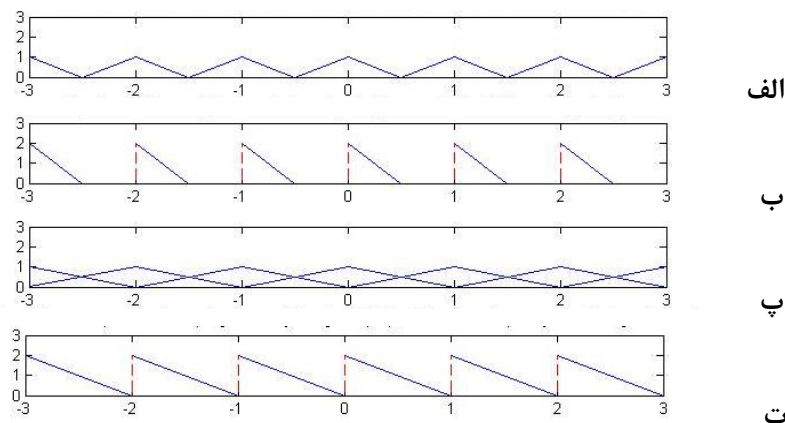
⁶ Instantaneous Autocorrelation Function (IAF)

در توزیع ویگنر بین فرکانس‌های مثبت و منفی سیگنال عبارات متقاطع ایجاد می‌شود؛ بنابراین اگر به‌جای محاسبه توزیع سیگنال اصلی، توزیع سیگنالی با فرکانس‌های نامنفی متناظر با سیگنال اصلی را محاسبه نمود، بخشی از عبارات متقاطع خارجی حذف می‌شود. به چنین سیگنالی، سیگنال تحلیلی گفته می‌شود. توزیع ویگنر-وایل همان توزیع ویگنر است با این تفاوت که به‌جای محاسبه توزیع سیگنال اصلی، توزیع سیگنال تحلیلی متناظر با آن محاسبه می‌شود [1].

سیگنال $s(t)$ حقیقی است اگر و تنها اگر

$$S(-\omega) = S^*(\omega) \quad (17)$$

که در آن $S(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال است [21]. از آنجایی که فرکانس‌های منفی سیگنال حقیقی از روی فرکانس‌های مثبت آن قابل محاسبه است، بنابراین می‌توان فرکانس‌های منفی را از بازنمایی سیگنال حقیقی حذف نمود. در سیگنال‌های پایین‌گذر حقیقی، حذف فرکانس‌های منفی می‌تواند دو مزیت داشته باشد. 1) کل پهنای باند را نصف می‌کند و می‌توان بدون هیچ مشکلی سیگنال را با نصف نرخ نمونه‌برداری حالت اصلی، نمونه‌برداری کرد. به عبارت دیگر، نرخ نایکوئیست⁸ نصف می‌شود. 2) باعث جلوگیری از بروز بخشی از عبارات متقاطع (حاصل شده به خاطر اثر متقابل فرکانس‌های مثبت و منفی سیگنال در توزیع زمان-فرکانس درجه دوم) می‌شود [1]. این موضوع در بخش بعدی توضیح داده شده است. شکل 5- الف یک سیگنال حقیقی را نشان می‌دهد که با دو برابر فرکانس نایکوئیست⁹ نمونه‌برداری شده است. شکل 5- ب سیگنال تحلیلی مرتبط با سیگنال اصلی را نشان می‌دهد که با همان نرخ، نمونه‌برداری شده است. اگر هر دو سیگنال اصلی و سیگنال تحلیلی متناظر با آن با فرکانس نایکوئیست (مربوط به سیگنال حقیقی) نمونه‌برداری شوند، پدیده انعکاس فرکانسی¹⁰ فقط برای سیگنال حقیقی رخ می‌دهد. این موضوع در شکل 5- پ و شکل 5- ت نشان داده شده است.



شکل 5: نقش سیگنال تحلیلی در پدیده الیاسینگ؛ الف: طیف سیگنال حقیقی S با فرکانس نمونه‌برداری دو برابر فرکانس نایکوئیست، ب: طیف سیگنال تحلیلی Z متناظر با S با همان فرکانس نمونه‌برداری، پ: نمونه‌برداری سیگنال S با فرکانس نایکوئیست (بروز پدیده انعکاس فرکانسی)؛ ت: نمونه‌برداری سیگنال Z با فرکانس نایکوئیست (عدم بروز پدیده انعکاس فرکانسی)

یکی از روش‌های ساخت سیگنال تحلیلی از روی سیگنال حقیقی، استفاده از تبدیل هیلبرت است. تبدیل هیلبرت سیگنال $s(t)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{H}\{s(t)\} = (-j * \text{sgn}(\omega))S(\omega) \quad (18)$$

که در آن $S(\omega)$ تبدیل فوریه $s(t)$ است. تابع $\text{sgn}(\cdot)$ همان تابع علامت است. سیگنال «تحلیلی با مؤلفه DC حقیقی» متناظر با سیگنال $s(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [1]:

$$z(t) = s(t) + j\mathcal{H}\{s(t)\} \quad (19)$$

توزیع ویگنر-وایل سیگنال $s(t)$ با سیگنال تحلیلی $z(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

⁷ این شکل حاوی دو بازنمایی مختلف از یک ماتریس زمان-فرکانس می‌باشد که به صورت تصویر خاکستری و تور (mesh) رسم شده است.

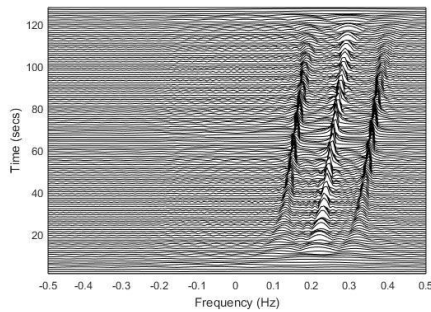
⁸ Nyquist rate

⁹ فرکانس نایکوئیست به صورت نصف نرخ نایکوئیست تعریف می‌شود.

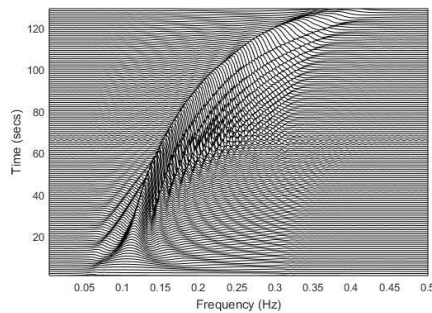
¹⁰ Aliasing

$$WD_s(t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \left\{ z \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \quad (20)$$

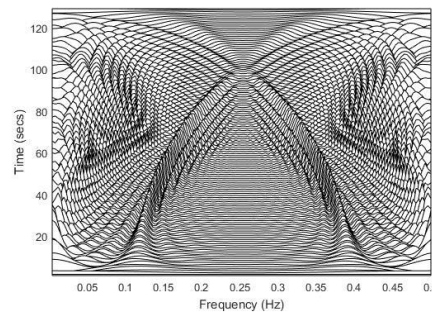
یکی از مزایای توزیع ویگنر-وایل نسبت به توزیع ویگنر، حذف عبارات متقاطع به خاطر اثر متقابل بین فرکانس‌های مثبت و منفی سیگنال می‌شود. شکل 6 توزیع ویگنر-وایل سیگنال دو مؤلفه‌ای شکل 4 را نشان می‌دهد. توزیع ویگنر-وایل به خوبی تعداد زیادی از عبارات متقاطع را حذف کرده است. مزیت دیگر توزیع ویگنر-وایل، جلوگیری از بروز پدیده انعکاس فرکانسی در نمونه‌برداری سیگنال‌های حقیقی با فرکانس نایکوئیست (مربوط به سیگنال حقیقی) می‌شود. شکل 7 بروز پدیده انعکاس فرکانسی در توزیع ویگنر برای یک سیگنال شبه هذلولی¹¹ با فرکانس 0/1 تا 0/4 هرتز و نرخ نمونه‌برداری 1 هرتز نشان می‌دهد.



شکل 6: توزیع ویگنر-وایل از سیگنال شکل 4؛ توزیع ویگنر-وایل به خوبی عبارات متقاطع بین فرکانس‌های مثبت و منفی را حذف می‌کند.



ب: توزیع ویگنر-وایل



الف: توزیع ویگنر

شکل 7: نقش توزیع ویگنر-وایل در جلوگیری از بروز پدیده انعکاس فرکانسی در نمونه‌برداری سیگنال‌های حقیقی با فرکانس نایکوئیست

توزیع ویگنر-وایل دارای ویژگی‌های ریاضی زیادی است که باعث افزایش کاربرد آن می‌شود [1, 23]. اگرچه توزیع ویگنر-وایل همزمان تفکیک‌پذیری زمانی و فرکانسی بالایی دارد ولی در حذف عبارات متقاطع خارجی بین مؤلفه‌های فرکانسی مثبت سیگنال و عبارات متقاطع داخلی ناتوان است. توزیع‌های زمان-فرکانس مبتنی بر هسته [24, 25] روش‌هایی برای کاهش عبارات متقاطع در کنار حفظ تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی می‌باشند. به عبارت دیگر، هدف از توزیع‌های مبتنی بر هسته تلفیق ویژگی‌های توزیع‌های درجه دوم (تفکیک‌پذیری زمانی و فرکانسی بالا) و خطی (عدم وجود عبارات متقاطع) است.

2-4 توزیع‌های زمان-فرکانس مبتنی بر هسته

وجود عبارات متقاطع در روش ویگنر-وایل تحلیل سیگنال را دچار مشکل می‌کند. این عبارات متقاطع را با کانوالو توزیع ویگنر-وایل با یک هسته هموارساز می‌توان کاهش داد [27]. توزیع‌های زمان-فرکانس مبتنی بر هسته در رده‌ی توزیع‌های درجه دوم در نظر گرفته می‌شوند [4] و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\rho_s(t, \omega) = \gamma(t, \omega) \underset{(t, \omega)}{**} WVD_s(t, \omega) \quad (21)$$

¹¹ Hyperbolic

که در آن $\rho_s(t, \omega)$ توزیع زمان-فرکانس مبتنی بر هسته از سیگنال $s(t)$ با کرنل دو بعدی $\gamma(t, \omega)$ است. عمل کانالو در عبارت فوق باعث کاهش تفکیک‌پذیری فرکانسی می‌شود؛ به عبارت دیگر، توزیع‌های زمان-فرکانس مبتنی بر هسته در ازای کاهش تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی، عبارات متقاطع را تقلیل می‌دهند [5]. به طور کلی، طراحی هسته‌های توزیع زمان-فرکانس در چهار حوزه انجام می‌شود. (1) حوزه زمان-فرکانس، (2) حوزه زمان-تاخیر^{۱۲}، (3) حوزه داپلر-فرکانس و (4) حوزه داپلر-تاخیر [5].

هسته در حوزه زمان-تاخیر همان تبدیل فوریه معکوس از هسته در حوزه زمان-فرکانس است؛ به عبارت دیگر [1]

$$G(t, \tau) = \mathcal{F}_{\tau \leftarrow \omega}^{-1}\{\gamma(t, \omega)\} \quad (22)$$

بنابراین رابطه (21) را می‌توان به شکل زیر نوشت [1]:

$$\rho_s(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} G(t, \tau) *_t K_z(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (23)$$

که در آن $K_z(t, \tau)$ تابع خودهمبستگی لحظه‌ای سیگنال تحلیلی $z(t)$ مربوط به سیگنال $s(t)$ است. تابع خودهمبستگی لحظه‌ای سیگنال $x(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$K_x(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (24)$$

یکی دیگر از حوزه‌های تحلیل و طراحی هسته توزیع زمان-فرکانس، حوزه داپلر-فرکانس است. هسته داپلر-فرکانس به کمک رابطه (25) محاسبه می‌شود. بنابراین رابطه (21) را می‌توان به صورت رابطه (26) نوشت [1].

$$\mathcal{G}(v, \omega) = \mathcal{F}_{t \rightarrow v}\{\gamma(t, \omega)\} \quad (25)$$

$$\rho_s(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(v, \omega) *_\omega k_z(v, \omega) e^{j\omega t} dv \quad (26)$$

که در آن $k_z(v, \omega)$ تابع خودهمبستگی طیفی^{۱۳} از سیگنال تحلیلی $z(t)$ مربوط به سیگنال $s(t)$ است. تابع خودهمبستگی طیفی سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(\omega)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$k_x(v, \omega) = X\left(\omega + \frac{v}{2}\right) X^*\left(\omega - \frac{v}{2}\right) \quad (27)$$

هسته در حوزه داپلر-تاخیر را می‌توان از یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود.

$$g(v, \tau) = \mathcal{F}_{t \rightarrow v}\{G(t, \tau)\} \quad (28)$$

$$g(v, \tau) = \mathcal{F}_{\tau \leftarrow \omega}^{-1}\{\mathcal{G}(v, \omega)\} \quad (29)$$

به همین ترتیب رابطه (21) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\rho_s(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(v, \omega) A_z(v, \tau) e^{-j\omega\tau + 2\pi jtv} d\tau dv \quad (30)$$

که در آن $A_z(v, \tau)$ تابع ابهام^{۱۴} از سیگنال تحلیلی $z(t)$ مربوط به سیگنال $s(t)$ است. تابع ابهام سیگنال $x(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [1].

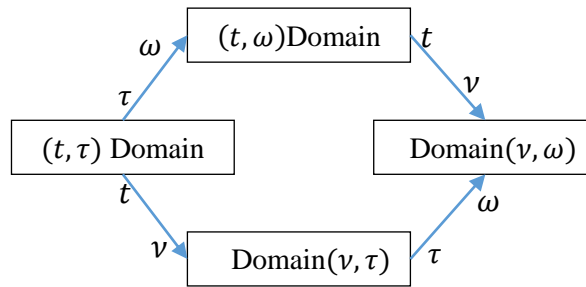
$$A_x(v, \tau) = \int_{\mathbb{R}} K_x(t, \tau) e^{-2j\pi tv} dt \quad (31)$$

¹² Time-Lag domain

¹³ Spectral Autocorrelation Function(SAF)

¹⁴ Ambiguity

شکل 8 رابطه بین چهار حوزه تحلیل و طراحی هسته توزیع‌های زمان-فرکانس را نشان می‌دهد.



شکل 8: رابطه بین چهار حوزه تحلیل و طراحی هسته توزیع‌های زمان-فرکانس، پیکان نماینده تبدیل فوریه است

می‌توان برای ساده‌تر کردن طراحی هسته توزیع‌های زمان-فرکانس، هسته را به صورت حاصل ضرب دو تابع غیر وابسته به فرکانس و غیر وابسته به زمان در نظر گرفت؛ به عبارت دیگر هسته $\gamma(t, \omega)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت [1, 5]:

$$\gamma(t, \omega) = g_1(t)G_2(\omega) \quad (32)$$

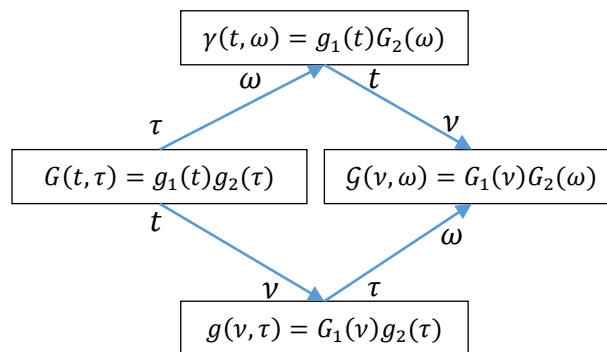
که در آن $g_1(t)$ تابع غیر وابسته به فرکانس و $G_2(\omega)$ تابع غیر وابسته به زمان است. به این سری از هسته‌ها، هسته‌های تفکیک‌پذیر گفته می‌شود. رابطه قبل را می‌توان در حوزه‌های زمان-تاخیر، داپلر-فرکانس و داپلر-تاخیر به صورت زیر نوشت.

$$G(t, \tau) = g_1(t)g_2(\tau) \quad (33)$$

$$\mathcal{G}(v, \omega) = G_1(v)G_2(\omega) \quad (34)$$

$$g(v, \tau) = G_1(v)g_2(\tau) \quad (35)$$

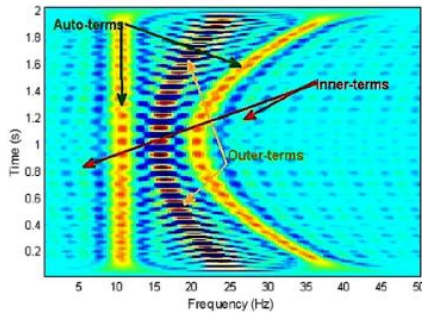
شکل 9 رابطه بین فرمول‌بندی‌های متفاوت از هسته‌های تفکیک‌پذیر را نشان می‌دهد. در ادامه تعدادی از توزیع‌های معروف مبتنی بر هسته آورده شده است.



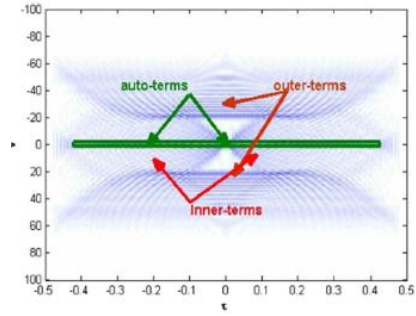
شکل 9: رابطه بین فرمول‌های هسته‌های تفکیک‌پذیر در چهار حوزه مختلف، پیکان نماینده تبدیل فوریه است.

• توزیع B(BD)

شکل 10 محل قرارگیری عبارات متقاطع و عبارات اصلی توزیع زمان-فرکانس را نشان می‌دهد. در حوزه زمان-فرکانس، عبارات اصلی در کل صفحه پراکنده می‌شوند در حالی که در حوزه داپلر-تاخیر، عبارات اصلی در مرکز صفحه قرار می‌گیرد. عبارات متقاطع خارجی و داخلی در حوزه زمان-فرکانس به ترتیب بین دو مؤلفه سیگنال و داخل هر مؤلفه سیگنال تشکیل می‌شود. از طرف دیگر، در حوزه داپلر-تاخیر عبارات متقاطع خارجی و داخلی در محدوده نقاط دور از مرکز صفحه قرار می‌گیرد [5]. این موضوع، نظریه طراحی بسیاری از توزیع‌های زمان-فرکانس سیگنال مانند توزیع B است.



ب



الف

شکل 10: نمایش محل عبارات متقاطع و عبارات اصلی توزیع زمان-فرکانس؛ الف: حوزه داپلر-تاخیر، ب: حوزه زمان-فرکانس [5]

توزیع B، یکی از توزیع‌هایی است که در حوزه داپلر-تاخیر و به صورت تفکیک‌پذیر طراحی شده است. هسته توزیع B، به صورت زیر است.

$$G_1(\nu) = \frac{|\Gamma(\beta + j\pi\nu)|^2}{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)} \quad (36)$$

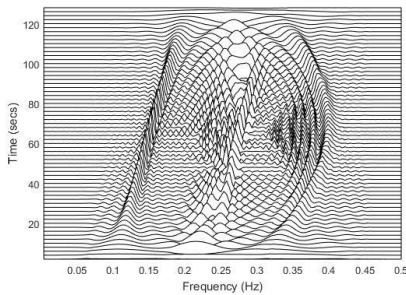
$$g_2(\tau) = |\tau|^\beta \quad (37)$$

$$g(\nu, \tau) = |\tau|^\beta \frac{|\Gamma(\beta + j\pi\nu)|^2}{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)} \quad (38)$$

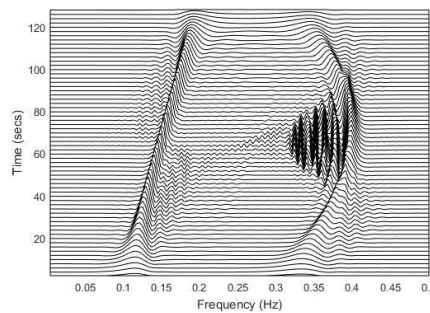
که در آن‌ها $0 \leq \beta \leq 1$ ، $|\tau| \leq 0.5$ ، $|\nu| \leq 0.5$ است. $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما بوده و تابع فاکتوریل را برای اعداد اعشاری درونیابی می‌کند. تابع گاما به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\xi-1} dt \quad (39)$$

توزیع B برای مقادیر β کوچک توزیع زمان-فرکانس با تفکیک‌پذیری بالایی ارائه می‌دهد [27]. شکل 11 توزیع ویگنر-وایل و توزیع B یک سیگنال دو مؤلفه‌ای را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که هسته توزیع B توانسته است بخشی از عبارات متقاطع را حذف نماید.



ب: توزیع ویگنر-وایل



الف: توزیع B

شکل 11: توزیع B و توزیع ویگنر-وایل از یک سیگنال دو مؤلفه‌ای؛ توزیع B بخشی از عبارات متقاطع را کاهش داده است

• توزیع B تغییر یافته (MBD)

مقدار فیلتر g_2 در نقطه $g_2(0) = |0|^\beta = 0$ باعث می‌شود تا مقادیر با تأخیر صفر از بین بروند. توزیع B تغییر یافته با حذف تغییر تابع g_2 این مشکل را مرتفع ساخته است. هسته توزیع B تغییر یافته به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G_1(\nu) = \frac{|\Gamma(\beta + j\pi\nu)|^2}{\Gamma^2(\beta)} \quad (40)$$

$$g_2(\tau) = 1 \quad (41)$$

$$g(v, \tau) = \frac{|\Gamma(\beta + j\pi v)|^2}{\Gamma^2(\beta)} \quad (42)$$

که در آنها $0 \leq \beta \leq 1$ ، $|v| \leq 0.5$ است. توزیع B تغییر یافته یک توزیع غیر وابسته به تأخیر^{۱۵} است.

• **توزیع B تغییر یافته گسترش یافته (EMBD)^{۱۶}**

به منظور کنترل بر روی بعد تأخیر در توزیع B، می توان آن را با اضافه نمودن پارامتری جهت کنترل عرض تأخیر بهبود داد [27]. هسته توزیع B تغییر یافته-گسترش یافته از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$G_1(v) = \frac{|\Gamma(\beta + j\pi v)|^2}{\Gamma^2(\beta)} \quad (43)$$

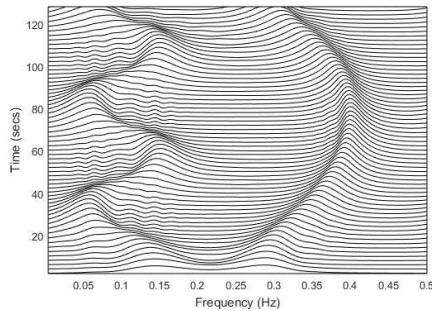
$$g_2(\tau) = \frac{|\Gamma(\alpha + j\pi\tau)|^2}{\Gamma^2(\alpha)} \quad (44)$$

$$g(v, \tau) = \frac{|\Gamma(\alpha + j\pi\tau)|^2}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{|\Gamma(\beta + j\pi v)|^2}{\Gamma^2(\beta)} \quad (45)$$

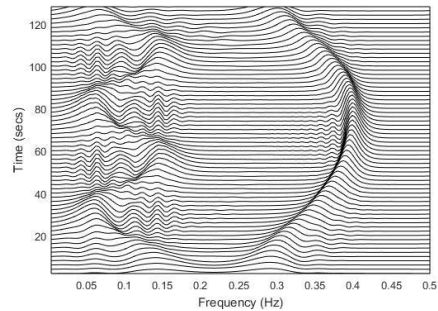
که در آنها $0 \leq \alpha \leq 1$ ، $0 \leq \beta \leq 1$ ، $|\tau| \leq 0.5$ ، $|v| \leq 0.5$ است. یکی از مسائلی که در توزیع های مبتنی بر هسته مطرح می شود، انتخاب بهینه پارامترهای توزیع است که نقش اساسی در توانمندی توزیع دارد. شکل 12 این موضوع را نشان می دهد.

$$\alpha = 0.1, \beta = 0.1$$

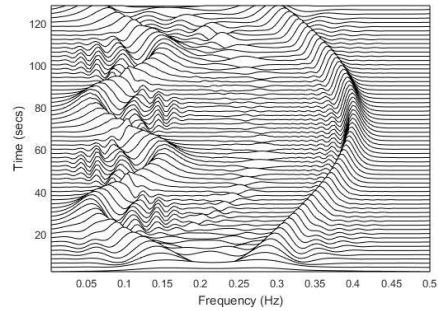
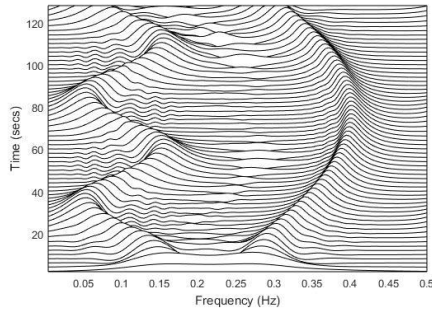
$$\alpha = 0.1, \beta = 0.3$$



$$\alpha = 0.3, \beta = 0.1$$



$$\alpha = 0.3, \beta = 0.3$$



شکل 12: نقش پارامترهای توزیع EMBD در میزان حذف عبارات متقاطع و تفکیک پذیری صفحه

• **توزیع همینگ-هانینگ^{۱۷}**

توزیع همینگ-هانینگ یک هسته دو بعدی با دو فیلتر پایین گذر در حوزه داپلر-تاخیر است. هسته توزیع همینگ-هانینگ به صورت زیر است.

$$G_1(v) = (0.5 + 0.5 \cos(2\pi v)) \quad (46)$$

$$g_2(\tau) = (0.54 + 0.46 \cos(2\pi\tau)) \quad (47)$$

$$g(v, \tau) = G_1(v)g_2(\tau) \quad (48)$$

¹⁵ Lag Independent (LI)

¹⁶ Extended Modified B-Distribution(EMBD)

¹⁷ Hamming-Hanning TFD

که در آن $0.5 \leq \tau \leq 0.5$ - و $0.5 \leq \nu \leq -0.5$ است. برای طراحی هر هسته‌ای در حوزه داپلر-تاخیر می‌توان از انواع فیلترهای پایین‌گذر استفاده نمود [27]. توزیع‌های زمان-فرکانس مبتنی بر هسته پر استفاده‌ترین دسته توزیع‌های زمان-فرکانس هستند و توانایی حل مسائلی که با توزیع‌های خطی و درجه دوم حل می‌شوند، را دارند. در مراجع گذشته، این توزیع‌ها به صورت گسترده در تحلیل سیگنال‌های مغزی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [27, 28].

3. سنجش فشرده توزیع زمان-فرکانس سیگنال

به طور کلی در تحلیل کلاسیک سیگنال‌ها دو مشکل عمده وجود دارد. مشکل اول این است که حداقل فرکانس نمونه‌برداری در روش‌های کلاسیک پردازش سیگنال بر اساس نظریه نایکوئیست باید دو برابر بیشینه فرکانس حاضر در سیگنال باشد. در این روش‌ها نمونه‌های زیادی از سیگنال گرفته می‌شود در حالی که در سیگنال‌هایی با نمایش تنک¹⁸، برای پردازش و ساخت دوباره سیگنال به تعداد کمی از نمونه‌ها نیاز است. همچنین لزوم نمونه‌برداری با نرخ کمتر از نایکوئیست در زمینه‌های مختلفی مانند پزشکی و زمین‌شناسی (به لحاظ خطرات زیستی یا هزینه) کاربرد دارد. رشد نمایی داده‌ها نیازمند روش‌های بهتری برای جمع‌آوری، بازنمایی و پردازش داده‌ها است. مشکل دوم این است که معمولاً امکان از دست رفتن بعضی از نمونه‌های گرفته شده از سیگنال وجود دارد که با کمک روش‌های سنجش فشرده می‌توان آن‌ها را به دست آورد. روش‌های کلاسیک زمان-فرکانس برای سیگنال‌هایی با نمونه‌های از دست رفته ناتوان هستند. همچنین بیشتر توزیع‌های زمان-فرکانس سیگنال، در مواقعی که سیگنال دارای نوفه زیادی است، توزیع خوبی پیشنهاد نمی‌دهند. در این موارد، روش‌های سنجش فشرده به خوبی نوفه را حذف می‌کنند.

3-1 بازنمایی تنک

روش‌های سنجش فشرده تنها بر روی سیگنال‌هایی با نمایش تنک به خوبی کار می‌کنند. سیگنال x دارای نمایش تنک است اگر یک تبدیل پایه تنک کننده Ψ وجود داشته باشد به شرطی که در طی تبدیل، بیشتر ضرایب سیگنال صفر و یا نزدیک به صفر شده و تنها k ضریب سیگنال مقدار بزرگی داشته باشد. به چنین سیگنالی، سیگنال k -تنک گفته می‌شود. به عبارت ریاضی برای سیگنال گسسته x با طول N ، S نمایش تنک سیگنال x نامیده می‌شود اگر

$$x = \sum_{i=1}^N \psi_i s_i \quad (49)$$

که در آن ψ_i برداری هم‌اندازه با سیگنال x بوده و بردار S فقط در k نقطه مقدار بزرگی دارد. رابطه بالا را می‌توان به صورت ماتریسی نیز نوشت.

$$x_{N \times 1} = \Psi_{N \times N} \cdot S_{N \times 1} \quad (50)$$

که در آن Ψ یک ماتریس متعامد یکه مانند تبدیل کسینوسی گسسته¹⁹ است؛ این موضوع ایده چندین روش فشرده‌سازی مانند JPEG2000 است.

3-2 سنجش فشرده

در دهه اخیر، سنجش فشرده توجه زیادی را به خود جلب کرده است [29, 30]. هدف اصلی سنجش فشرده به دست آوردن سیگنال از روی تعداد کمی نمونه اندازه‌گیری شده از آن است. فرض کنید از سیگنال x با طول N ، M تصویر خطی با نام y اندازه‌گیری شده است که در آن $M \ll N$ است. به عبارت ریاضی

$$y_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \cdot x_{N \times 1} \quad (51)$$

که در آن Φ ماتریس سنجش²⁰ است. رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$y_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \cdot x_{N \times 1} = \Phi_{M \times N} \cdot \Psi_{N \times N} \cdot S_{N \times 1} \quad (52)$$

برای بازسازی سیگنال x (یا بردار تنک S متناظر با سیگنال x) باید معادله بالا حل شود که در آن y معلوم و S یا x مجهول است. از آنجایی که تعداد مجهولات مسئله (N) از تعداد معلومات مسئله (M) کمتر است مسئله بینهایت جواب دارد. با توجه به تنک بودن

¹⁸ Sparse

¹⁹ Discrete cosine transform(DCT)

²⁰ Sensing Matrix

سیگنال s تعداد جواب‌های قابل قبول محدود می‌شود. برای به‌دست آوردن سیگنال s به دنبال یافتن کمینه سیگنال s هستیم به عبارت دیگر

$$\arg \min_s \|s\|_0 \text{ s.t. } \Phi \cdot \Psi \cdot s = y \quad (53)$$

که در آن $\| \cdot \|_0$ بیانگر نرم صفر^{۲۱} است. از آنجایی که حل مسئله بالا به خاطر مشتق‌پذیر نبودن نرم صفر پیچیدگی محاسباتی بالایی دارد، معمولاً از نرم‌های بالاتر بجای آن استفاده می‌شود که تقریبی از سیگنال s ایجاد می‌کند.

3-3 سنجش فشرده و تحلیل زمان-فرکانس سیگنال

سیگنال‌های غیر ایستا معمولاً در حوزه زمان و یا حوزه فرکانس تنک نیستند ولی ممکن است در حوزه زمان-فرکانس دارای نمایش تنک باشند. به طور مثال یک سیگنال FM خطی را در نظر بگیرید. این سیگنال نه در حوزه زمان و نه در حوزه فرکانس دارای نمایش تنک نیست در حالی که در حوزه زمان-فرکانس دارای نمایش تنک است. شکل 1 این موضوع را نشان می‌دهد.

روش‌های سنجش فشرده توزیع زمان-فرکانس سیگنال معمولاً به دو دسته کلی تقسیم می‌شود. دسته اول به سنجش فشرده سیگنال در حوزه ابهام می‌پردازد و بنابراین به توزیع‌های زمان-فرکانس درجه دوم محدود می‌شود. دسته دوم از یک دیکشنری زمان-فرکانس برای پیدا کردن یک بازنمایی تنک از سیگنال استفاده می‌کند.

یکی از روش‌های ایجاد بازنمایی تنک از سیگنال، استفاده از حوزه ابهام (رابطه (31)) است. یکی از مزیت‌های مهم حوزه ابهام، قرار گرفتن عبارات متقاطع در فضای دور از مرکز صفحه داپلر-تاخیر است. از طرف دیگر مؤلفه‌های اصلی سیگنال در مرکز صفحه داپلر-تاخیر قرار می‌گیرند [27]؛ بنابراین می‌توان با یک فیلتر پایین‌گذر محدوده مرکزی صفحه داپلر-تاخیر را حفظ و بقیه بخش‌های سیگنال را در حوزه ابهام حذف نمود که می‌توان آن را به عنوان بازنمایی تنک از سیگنال در نظر گرفت.

توزیع زمان-فرکانس مطلوب $\hat{\rho}_x(t, f)$ حاصل از به کارگیری سنجش فشرده در حوزه ابهام با حل رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\rho}_x(t, f) = \arg \min_{\rho_x(t, f)} \|\rho_x(t, f)\|_1 \quad (54)$$

به شرطی که

$$F_{2D}^{-1}\{\rho_x(t, f)\} - \mathcal{A}_x^M = 0 \Big|_{(v, \tau) \in \Omega} \quad (55)$$

که در آن $\rho_x(t, f)$ توزیع زمان-فرکانسی‌ای است که قرار است بهینه شود. \mathcal{A}_x^M مجموعه نمونه‌هایی از تابع ابهام سیگنال است که درون فیلتر پایین‌گذر $(v, \tau) \in \Omega$ قرار می‌گیرد. همچنین $\|\cdot\|_1$ تابع نرم یک^{۲۲} است. در صورتی که سیگنال $x(t)$ حاوی نوفه باشد کافی است شرط بالا را به صورت زیر تغییر داد.

$$\|F_{2D}^{-1}\{\rho_x(t, f)\} - \mathcal{A}_x^M\|_2 \leq \varepsilon \Big|_{(v, \tau) \in \Omega} \quad (56)$$

که در آن به ترتیب $\|\cdot\|_2$ و ε بیانگر نرم دو^{۲۳} و حد آستانه خطای قابل قبول است [11, 31]. یکی از مسائل مهم در این روش، انتخاب فیلتر پایین‌گذر $(v, \tau) \in \Omega$ است که به چه میزان عبارت متقاطع را حذف و مؤلفه‌های اصلی سیگنال را حفظ نماید.

روش دیگر استفاده از سنجش فشرده برای ایجاد یک توزیع زمان-فرکانس، استفاده از دیکشنری است. پس از انتخاب دیکشنری، باید یک بازنمایی تنک از سیگنال محاسبه شود. پیچیدگی محاسباتی تولید یک بازنمایی تنک با کمک دیکشنری بسیار زیاد است به همین دلیل این روش برای بعضی از کاربردها مناسب نیست. برای افزایش سرعت آن می‌توان از روش حریصانه MP^{۲۴} استفاده نمود.

در روش MP، در مرحله اول برای به‌دست آوردن یک توزیع زمان-فرکانس از سیگنال، سیگنال $\hat{x}(m)$ و باقیمانده $R(m)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{x}^{(0)}(m) = 0 \quad (57)$$

$$R^{(0)}(m) = x(m) \quad (58)$$

که در آن m بیانگر اندیس نمونه‌های گرفته شده از سیگنال x است. روش MP روشی حریصانه بوده و به صورت مکرر سعی در تخمین بهتر سیگنال $\hat{x}(m)$ و به حداقل رساندن باقیمانده $R(m)$ دارد. در این روش در مرحله k سیگنال $\hat{x}(m)$ و باقیمانده $R(m)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

²¹ L0-Norm

²² L1-Norm

²³ L2-Norm

²⁴ Matching Pursuit(MP)

$$\hat{x}^{(k)}(m) = \hat{x}^{(k-1)}(m) + \alpha_k \phi_k(m) \quad (59)$$

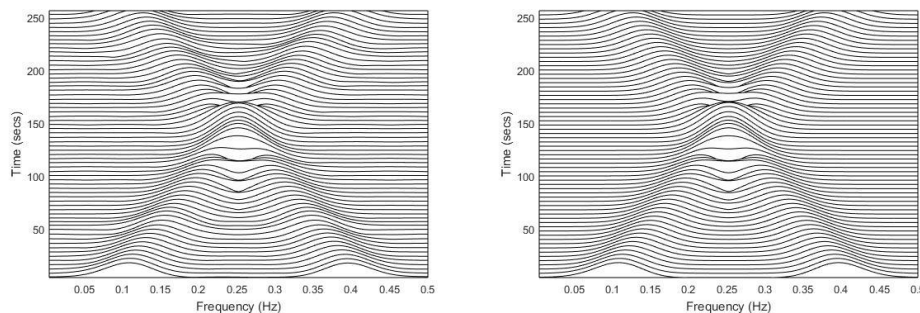
$$R^{(k)}(m) = x(m) - \hat{x}^{(k)}(m) \quad (60)$$

$$\alpha_k = \frac{\langle R^{(k-1)}(m), \phi_k(m) \rangle}{\|\phi_k(m)\|^2} \quad (61)$$

روند تکراری روش MP تا جایی ادامه پیدا می‌کند که مقدار باقیمانده به قدر کافی کوچک باشد و یا آنکه تعداد تکرار بیشینه‌ای رخداده باشد. تخمین توزیع زمان-فرکانس سیگنال با L پایه به صورت زیر انجام می‌شود.

$$TF\{x(n)\} = \sum_{l=1}^L \langle x(m), \phi_l(m) \rangle TF\{\phi_l(n)\} \quad (62)$$

در رابطه بالا $TF\{\cdot\}$ می‌تواند هر توزیع زمان-فرکانسی انتخاب شود [32]. شکل 13 توزیع زمان-فرکانس یک سیگنال با نمونه‌های از دست رفته را نشان می‌دهد. روش سنجش توزیع زمان-فرکانس سیگنال به خوبی مقادیر از دست رفته را محاسبه کرده است.



ب: توزیع سیگنال با 25٪ نمونه از بین رفته

الف: توزیع سیگنال اصلی

شکل 13: توزیع زمان-فرکانس سیگنال اصلی و سیگنال با 25٪ نمونه از بین رفته

4. معیارهای ارزیابی

در این بخش، بعضی از معیارهای ارزیابی توزیع‌های زمان-فرکانس سیگنال آورده شده است. نیاز به معیارهای ارزیابی در روش‌های زمان-فرکانس به دو دلیل وجود دارد؛ 1) مقایسه کردن توزیع‌های مختلف، 2) انتخاب خودکار و تطبیقی^{۲۵} پارامترهای یک توزیع برای کاربرد خاص [33]. هر کدام از معیارهای ارزیابی، یک یا چند ویژگی از توزیع زمان-فرکانس مانند تفکیک‌پذیری و تمرکز انرژی را بررسی می‌کنند که همگی آن‌ها بدون مرجع می‌باشند [34]. از آنجایی که صفحه زمان-فرکانس حاصل از توزیع‌های درجه دوم، همگی صفحه انرژی سیگنال هستند، بنابراین تمرکز انرژی سیگنال به نقاط غیر صفر صفحه زمان-فرکانس وابستگی دارد. به طور مثال یک معیار ارزیابی تمرکز انرژی را می‌توان به صورت تعداد نقاط غیر صفر توزیع تعریف کرد؛ هر چه این تعداد نقاط کمتر باشد، تمرکز انرژی سیگنال بیشتر می‌باشد [33].

4-1 آنتروپی شانون

معیار ارزیابی آنتروپی شانون تمرکز انرژی و تفکیک‌پذیری توزیع زمان-فرکانس را ارزیابی می‌کند. آنتروپی شانون برای بازنمایی زمان-فرکانس $TF(n, \omega)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [35]:

$$E_{shannon}^{TF(n, \omega)} = \sum_n \sum_{\omega} TF(n, \omega) \log_2(TF(n, \omega)) \quad (63)$$

رابطه بالا برای بازنمایی‌های زمان-فرکانس با مقدار منفی مانند ویگنر-وایل مناسب نیست و برای آن از رابطه زیر استفاده می‌شود [36]:

$$E_{shannon}^{TF(n, \omega)} = \sum_n \sum_{\omega} |TF(n, \omega)| \log_2(|TF(n, \omega)|) \quad (64)$$

هر چه مقدار آنتروپی شانون بیشتر باشد، تفکیک‌پذیری و تمرکز انرژی توزیع کمتر است و هر چه مقدار آنتروپی کمتر باشد، تفکیک‌پذیری و تمرکز انرژی توزیع زمان-فرکانس بیشتر است [35, 36].

4-2 آنتروپی Renyi

اگر یک سیگنال از مولفه‌های پایه زیادی ساخته شده باشد، صفحه زمان-فرکانس آن پیچیدگی بالایی خواهد داشت (حاوی اطلاعات زیاد خواهد بود) [37]. آنتروپی Renyi میزان پیچیدگی توزیع زمان-فرکانس را مشخص می‌کند. آنتروپی Renyi توزیع زمان-فرکانس $TF(n, \omega)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [37, 38]:

$$Renyi_{\alpha}^{TF(n, \omega)} = \frac{\log_2(\sum_n \sum_{\omega} TF^{\alpha}(n, \omega))}{1 - \alpha} \quad (65)$$

که در آن عدد صحیح α مرتبه آنتروپی (معمولاً بزرگتر از یک) است. آنتروپی Renyi را می‌توان بدون تمرکز بر انرژی به صورت بهنجار زیر تعریف نمود [23]:

$$Renyi_{\alpha}^{TF(n, \omega)} = \frac{\log_2\left(\frac{\sum_n \sum_{\omega} TF^{\alpha}(n, \omega)}{\sum_n \sum_{\omega} TF(n, \omega)}\right)}{1 - \alpha} \quad (66)$$

هر چه مقدار آنتروپی Renyi کمتر باشد، نشانگر کیفیت بالا و پیچیدگی کمتر توزیع زمان-فرکانس است و برعکس. کمتر بودن پیچیدگی یک توزیع زمان-فرکانس را می‌توان معادل تفکیک‌پذیری بالاتر و تمرکز انرژی بیشتر دانست [37].

4-3 نرخ نرم‌ها^{۲۶}

در مقاله [39]، معیاری برای ارزیابی میزان تمرکز انرژی یا تیز بودن توزیع زمان-فرکانس معرفی شده است. معیار نرخ نرم توزیع زمان-فرکانس سیگنال، از تقسیم نرم-4 توزیع بر مربع نرم-2 توزیع محاسبه می‌شود.

$$M^{TF(n, \omega)} = \frac{\sum_n \sum_{\omega} |TF(n, \omega)|^4}{(\sum_n \sum_{\omega} |TF(n, \omega)|^2)^2} \quad (67)$$

هر چه نرخ نرم کمتر باشد، تمرکز انرژی سیگنال بیشتر خواهد بود و برعکس [23, 38, 39].

4-4 معیار Ljubisa

معیار ارزیابی Ljubisa، یک ارزیابی کمی از تمرکز انرژی توزیع زمان-فرکانس ارائه می‌دهد. هر چه ارزیابی این معیار از توزیعی کمتر باشد، تمرکز انرژی توزیع بیشتر خواهد بود [33].

$$Ljubisa_{\beta}^{TF(n, \omega)} = \left(\sum_n \sum_{\omega} |TF(n, \omega)|^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta} \quad (68)$$

که در آن $\beta > 1$ است و میزان حساسیت معیار در نقاط با انرژی کم را تعیین می‌کند. هر چه β بیشتر باشد، میزان تأثیر نقاط کم انرژی در ارزیابی معیار بیشتر می‌شود [33].

5. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع‌های مختلف زمان-فرکانس سیگنال با تأکید بر بهبود و گسترش این حوزه از دانش مرور گردید. هدف این مقاله بر مبنای سه محور ضرورت، روش‌ها و معیارهای ارزیابی تحلیل زمان-فرکانس سیگنال قرار گرفته است. محور اول، ضرورت استفاده از تحلیل و پردازش زمان-فرکانس سیگنال را مشخص می‌کند. از آنجایی که بیشتر سیگنال‌های واقعی، غیرایستا هستند تحلیل آن‌ها در حوزه فرکانس کارآمد نیست، در حالی که توزیع‌های زمان-فرکانس توانایی تحلیل این سیگنال‌ها را دارد. محور دوم، روش‌های تحلیل و پردازش زمان-فرکانس سیگنال می‌باشد. فرکانس آنی سیگنال در هر لحظه از زمان، بزرگترین فرکانس هر مولفه سیگنال را از نظر دامنه محاسبه می‌کند؛ بنابراین فرکانس آنی جزئیات مولفه‌های سیگنال را نشان نمی‌دهند. از همین رو، نیاز به تحلیل‌هایی با بازتابی بیشتر احساس می‌شود. توزیع‌های زمان-فرکانس خطی جزئیات بیشتری از سیگنال را نمایش می‌دهند. اگرچه روش‌های خطی تفکیک‌پذیری فرکانسی و تفکیک‌پذیری زمانی خوبی دارند ولی تفکیک‌پذیری توام فرکانسی و زمانی خوبی ندارند. افزایش همزمان تفکیک‌پذیری فرکانسی و زمانی در توزیع‌های زمان-فرکانس سیگنال به عنوان یک دغدغه اصلی مطرح می‌شود. روش‌های زمان-فرکانس درجه دوم دارای تفکیک‌پذیری توام فرکانسی و زمانی بالایی هستند ولی دارای عبارات متقاطع نیز می‌باشند؛ بنابراین، کاهش عبارات متقاطع در توزیع‌های زمان-فرکانس به عنوان موضوع جدیدی در توزیع‌های درجه دوم مطرح می‌شود. بیشتر روش‌های مختلف زمان-فرکانس درجه دوم بر مبنای کاهش عبارات متقاطع با حفظ تفکیک‌پذیری توام فرکانسی و زمانی طراحی شده‌اند. روش‌های نوین

زمان-فرکانس به منظور کاهش نرخ نمونه‌برداری از سیگنال و کاهش حساسیت توزیع‌های زمان-فرکانس به نوفه، با بهره‌گیری از روش سنجش فشرده طراحی شده است و در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفت. در محور سوم این مقاله به‌خاطر نیاز به مقایسه کردن توزیع‌ها و همچنین انتخاب خودکار و تطبیقی پارامترهای یک توزیع برای کاربرد خاص، معیارهای ارزیابی توزیع‌های زمان-فرکانس معرفی شدند. به نظر نویسندگان، با دانش کافی بر این سه محور، می‌توان توزیع‌های زمان-فرکانس جدیدتری برای کاربردهای خاص پیشنهاد نمود.

مراجع

- [1] B. Boashash, *Time frequency analysis*: Gulf Professional Publishing, 2003.
- [2] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*: Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] H. Azami, S. Sanei, K. Mohammadi, and H. Hassanpour, "A hybrid evolutionary approach to segmentation of non-stationary signals," *Digital Signal Processing*, vol. 23, pp. 1103-1114, 7// 2013.
- [4] M. Abed, A. Belouchrani, M. Cheriet, and B. Boashash, "Time-Frequency Distributions Based on Compact Support Kernels: Properties and Performance Evaluation," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 60, pp. 2814-2827, 2012.
- [5] B. Boashash, N. A. Khan, and T. Ben-Jabeur, "Time-frequency features for pattern recognition using high-resolution TFDs: A tutorial review," *Digital Signal Processing*, vol. 40, pp. 1-30, 5// 2015.
- [6] X. Shengli, Y. Liu, Y. Jun-Mei, Z. Guoxu, and X. Yong, "Time-Frequency Approach to Underdetermined Blind Source Separation," *Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on*, vol. 23, pp. 306-316, 2012.
- [7] H. Hassanpour, M. Mesbah, and B. Boashash, "Time-frequency based newborn EEG seizure detection using low and high frequency signatures," *Physiological Measurement*, vol. 25, p. 935, 2004.
- [8] H. Hassanpour, M. Mesbah, and B. Boashash, "Time-frequency feature extraction of newborn EEG seizure using SVD-based techniques," *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2004, pp. 2544-2554, 2004.
- [9] H. Hassanpour, M. Mesbah, and B. Boashash, "EEG spike detection using time-frequency signal analysis," in *ICASSP'04, IEEE International Conference on*, 2004, pp. 421-424.
- [10] H. Hassanpour, "A time-frequency approach for noise reduction," *Digital Signal Processing*, vol. 18, pp. 728-738, 2008.
- [11] B. Boashash, *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*: Academic Press, 2015.
- [12] B. Boashash. (2016). *Time-Frequency Signal Processing & Analysis Toolbox*. Available: <http://time-frequency.net/>
- [13] Z. Haijian, B. Guoan, Y. Wen, S. G. Razul, and C. M. S. See, "IF estimation of FM signals based on time-frequency image," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 326-343, 2015.
- [14] Y. Zhou, S. Li, P. Luo, and Q. Zhou, "Instantaneous frequency measurement based on EMD and TVAR," in *Electronic Measurement & Instruments (ICEMI), 2011 10th International Conference on*, 2011, pp. 303-306.
- [15] N. A. Khan and B. Boashash, "Instantaneous Frequency Estimation of Multicomponent Nonstationary Signals Using Multiview Time-Frequency Distributions Based on the Adaptive Fractional Spectrogram," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 20, pp. 157-160, 2013.
- [16] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. II. Algorithms and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, pp. 540-568, 1992.
- [17] L. Heyoung and B. Zeungnam Zenn, "A Variable Bandwidth Filter for Estimation of Instantaneous Frequency and Reconstruction of Signals With Time-Varying Spectral Content," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 2052-2071, 2011.
- [18] S. Peng-Lang, B. Zheng, and S. Hong-Tao, "Nonparametric Detection of FM Signals Using Time-Frequency Ridge Energy," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 56, pp. 1749-1760, 2008.

- [19] J. Lerga, V. Sucic, and B. Boashash, "An efficient algorithm for instantaneous frequency estimation of nonstationary multicomponent signals in low SNR," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2011, p. 725189, 2011.
- [20] F. Auger, P. Flandrin, Y.-T. Lin, S. McLaughlin, S. Meignen, T. Oberlin, *et al.*, "Time-Frequency Reassignment and Synchrosqueezing: An overview," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, pp. 32-41, 2013-11-01 2013.
- [21] L. Stankovic, M. Daković, and T. Thayaparan, *Time-frequency signal analysis with applications*: Artech House, 2013.
- [22] E. Wigner, "On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium," *Physical Review*, vol. 40, pp. 749-759, 06/01/ 1932.
- [23] N. A. Khan, "Cross-term Suppression in Wigner Distribution," Mohammad Ali Jinnah University Islamabad, 2010.
- [24] B. Jokanovic, M. G. Amin, Y. D. Zhang, and F. Ahmad, "Time-frequency kernel design for sparse joint-variable signal representations," in *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2014 Proceedings of the 22nd European*, 2014, pp. 2100-2104.
- [25] J. L. Tan and A. Z. b. Sha'ameri, "Adaptive optimal kernel smooth-windowed Wigner-Ville bispectrum for digital communication signals," *Signal Processing*, vol. 91, pp. 931-937, 4// 2011.
- [26] B. Boashash, G. Azemi, and J. M. O'Toole, "Time-Frequency Processing of Nonstationary Signals: Advanced TFD Design to Aid Diagnosis with Highlights from Medical Applications," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 30, pp. 108-119, 2013.
- [27] B. Boashash and T. Ben-Jabeur, "Design of a high-resolution separable-kernel quadratic TFD for improving newborn health outcomes using fetal movement detection," in *Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA), 2012 11th International Conference on*, 2012, pp. 354-359.
- [28] B. Boashash and S. Ouelha, "Automatic signal abnormality detection using time-frequency features and machine learning: A newborn EEG seizure case study," *Knowledge-Based Systems*, vol. 106, pp. 38-50, 8/15/ 2016.
- [29] R. G. Baraniuk, "Compressive sensing," *IEEE signal processing magazine*, vol. 24, 2007.
- [30] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 1289-1306, 2006.
- [31] P. Flandrin and P. Borgnat, "Time-Frequency Energy Distributions Meet Compressed Sensing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, pp. 2974-2982, 2010.
- [32] E. Sejdi, x, and L. F. Chaparro, "Time-frequency representations based on compressive samples," in *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2013 Proceedings of the 21st European*, 2013, pp. 1-4.
- [33] L. Stanković, "A measure of some time–frequency distributions concentration," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 621-631, 3// 2001.
- [34] B. Boashash and V. Sucic, "Resolution measure criteria for the objective assessment of the performance of quadratic time-frequency distributions," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 1253-1263, 2003.
- [35] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, vol. 5, pp. 3-55, 2001.
- [36] N. Ali Khan, I. Ahmad Taj, M. Noman Jaffri, and S. Ijaz, "Cross-term elimination in Wigner distribution based on 2D signal processing techniques," *Signal Processing*, vol. 91, pp. 590-599, 3// 2011.
- [37] R. G. Baraniuk, P. Flandrin, A. J. E. M. Janssen, and O. J. J. Michel, "Measuring time-frequency information content using the Renyi entropies," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 1391-1409, 2001.
- [38] V. Sucic, "Parameters selection for optimising time-frequency distributions and measurements of time-frequency characteristics of nonstationary signals," PhD, 2004.
- [39] D. L. Jones and T. W. Parks, "A high resolution data-adaptive time-frequency representation," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 38, pp. 2127-2135, 1990.