

ارائه یک الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه بر پایه جهش دوسویه و تقاطع احتمالی

علی رضا فلاحی آذر

دانشجوی دکتری، گروه کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، تهران، ایران
پست الکترونیکی: a_falahiazar@srbiau.ac.ir

آرش شریفی

استادیار، گروه کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، تهران، ایران
پست الکترونیکی: a.sharifi@srbiau.ac.ir

چکیده

امروزه الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه^۱ به عنوان ابزاری قدرتمند جهت حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرند. معیارهای تنوع^۲ و همگرایی^۳ از مهمترین فاکتورهای یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه است که تمامی الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه سعی در بهبود آنها دارند. معیارهای تنوع و همگرایی تابعی از فازهای اکتشاف، استخراج و انتخاب هستند، در نتیجه برای ارائه یک الگوریتم بهینه‌سازی قدرتمند باید از الگوریتم‌های موثر در فازهای مختلف استفاده نمود. در این مطالعه، یک الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه در راستای ارتقاء معیارهای تنوع و همگرایی ارائه شده است. الگوریتم ارائه شده برای استخراج راه‌حل‌ها در فضای جستجو از الگوریتم جهش دوسویه پیشنهادی و برای اکتشاف راه‌حل‌ها در فضای جستجو از الگوریتم تقاطع احتمالی پیشنهادی استفاده می‌کند. در این مطالعه از الگوریتم فاصله نسلی و الگوریتم گسترش به ترتیب جهت سنجش معیارهای همگرایی و تنوع استفاده شده است. در بخش پایانی این مطالعه، عملکرد کلی الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم‌هایی از جمله NSGAI، NSPSO، SPEA و AWPSO بر روی توابع آزمون ZDT مورد نقد و بررسی قرار گرفته شده است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، تقاطع احتمالی، جهش دوسویه

1. مقدمه

بهینه‌سازی در ریاضیات به معنی یافتن یک یا تعدادی راه‌حل موجه برای یک یا چند هدف است. منظور از یافتن چنین راه‌حل‌هایی در حل یک مسأله، کمینه یا بیشینه ساختن اهداف مسئله است. بخش عمده‌ای از پژوهش‌ها و کاربردهای حوزه بهینه‌سازی، تنها یک هدف را مورد توجه قرار می‌دهند، در حالی که اغلب مسائل دنیای واقعی دربرگیرنده بیش از یک هدف است. حضور اهداف چندگانه متضاد (مانند همزمانی کمینه سازی هزینه ساخت و بیشینه سازی قابلیت اطمینان محصول) در بسیاری از مسائل طبیعی است و حل مسائل بهینه‌سازی را جذاب می‌کند. از آنجا که در یک مسئله با اهداف چندگانه متضاد، هیچ یک از راه‌حل‌ها را نمی‌توان به عنوان بهینه قلمداد نمود، مسئله بهینه‌سازی چندهدفه حاصل، متوسل به تعدادی راه‌حل بهینه می‌شود. روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک، در بهترین حالت می‌توانند در هر بار

¹ Optimization Multiobjective Algorithms

² Diversity

³ Convergence

اجرا، یک راه حل به دست آورند و این مشکل، این روش ها را در حل مسائل بهینه سازی چندهدفه نامناسب می سازد. از سوی دیگر، الگوریتم های تکاملی⁴، به دلیل آنکه رویکرد جمعیتی دارند، می توانند در هر نسل، چندین راه حل بهینه را بیابند. بنابراین الگوریتم های تکاملی گزینه مناسبی جهت حل مسائل بهینه سازی چندهدفه هستند.

الگوریتم های بهینه سازی در عمل از اهمیت زیادی به ویژه در طراحی مهندسی و آزمایش های علمی و تصمیم گیری تجاری برخوردارند. اغلب مسائل جستجو در دنیای واقعی ذاتاً شامل چندین هدف هستند. الگوریتم های بهینه سازی چندهدفه، مجموعه راه حل های نامغلوب در فضای هدف را مورد کاوش قرار می دهند و این مجموعه راه حل های نامغلوب اطلاعات با ارزشی درباره مسئله ارائه می نماید و سبب می شود که در پایان، تصمیم گیرنده بتواند تصمیم درستی در انتخاب راه حل ها اخذ نماید. تمامی الگوریتم های بهینه سازی چند هدفه سعی در ارتقاء همگرایی راه حل ها به پیشانی بهینه پرتو و افزایش تنوع راه حل ها دارند. همچنین هر الگوریتم بهینه سازی چند هدفه از روشی منحصر به فردی برای افزایش تنوع راه حل ها استفاده می کند. الگوریتم های چند هدفه کاربردهای زیادی از قبیل طراحی مبدل های حرارتی [1]، حل مشکل مدیریت تراکم انتقال بازارهای انرژی [2]، سیستم خنک کننده جت [3]، طراحی و برنامه ریزی زنجیره تامین سبز [4] و غیره را دارد. الگوریتم های چند هدفه زیادی در دو دهه اخیر ارائه شده اند.

زیتلر⁵ و سیلی⁶ الگوریتم تکاملی SPEA⁷ [5] را ارائه داده اند که ترکیبی از الگوریتم های تکاملی چند هدفه پیشین است و از مراحل از جمله مرتب سازی نامغلوب راه حل ها، محاسبه شایستگی هر راه حل بر اساس تعداد راه حل هایی که مغلوب کرده است، استفاده از رابطه غلبه پرتو⁸ جهت حفظ تنوع جمعیت و کاهش مجموعه نامغلوب بوسیله یک روش خوشه بندی تشکیل شده است. در این الگوریتم، مقدار انتساب شایستگی به هر راه حل بر اساس نزدیکی راه حل به پیشانی بهینه پرتو و توزیع مناسب آن است. این الگوریتم از آرشیو استفاده می کند بطوریکه اگر جمعیت آرشیو بسیار رشد کند باعث افزایش پیچیدگی زمانی می شود در نتیجه یک مقدار آستانه برای ظرفیت آرشیو در این الگوریتم تعیین شده است که مانع از رشد جمعیت آرشیو می شود.

دب⁹ و همکاران یک الگوریتم تکاملی چند هدفه بر پایه مرتب سازی نامغلوب در راستای بهبود الگوریتم NSGAI¹⁰ به نام NSGAI¹¹ [6] را ارائه دادند. NSGAI [7] یک الگوریتم غیر نخبه گرا است و برای انتخاب راه حل های نسل¹² آینده از مرتب سازی نامغلوب، معیار اشتراک شایستگی¹³ و چرخه رولت استفاده می کند، بطوریکه هر چه شایستگی راه حل بیشتر باشد شانس حضور راه حل در نسل آینده بیشتر است. NSGAI یک الگوریتم نخبه گرا است که از مرتب سازی نامغلوب و فاصله ازدحام¹⁴ استفاده می کند، بدین گونه که ابتدا راه حل ها را مرتب سازی نامغلوب می کند، سپس راه حل ها را از اولین پیشانی پرتو¹⁵ انتخاب می کند تا زمانی که تعداد راه حل مورد نیاز خود کمتر از تعداد راه حل های موجود در پیشانی پرتو موجود باشد آنگاه راه حل هایی را انتخاب می کند که بیشترین فاصله ازدحام را داشته باشند.

لی¹⁶ الگوریتم NSPSO¹⁷ [8] را که الهام گرفته از الگوریتم PSO¹⁸ [9] است را ارائه داد. PSO یک الگوریتم بهینه سازی تک هدفه است که با اضافه شدن قابلیت هایی به آن، می توان توانایی بهینه سازی توابع چند هدفه را در آن ایجاد نمود. NSPSO بهترین تجربه شخصی تمام ذرات را با فرزندان مورد مقایسه قرار می دهد، همچنین این الگوریتم، بهترین تجربه شخصی تمامی ذرات را با فرزندان ترکیب می کند سپس

⁴ Evolutionary algorithms

⁵ Zitzler

⁶ Thiele

⁷ Strength Pareto Evolutionary Algorithm

⁸ Pareto dominance

⁹ Deb

¹⁰ Nondominated Sorting Genetic Algorithm I

¹¹ Nondominated Sorting Genetic Algorithm II

¹² Generation

¹³ Fitness sharing

¹⁴ Crowding distance

¹⁵ Pareto front

¹⁶ Li

¹⁷ Non-dominated Sorting Particle Swarm Optimizer

¹⁸ Particle Swarm Optimizer

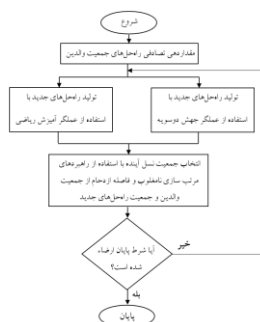
جمعیت حاصل شده را مرتب سازی نامغلوب می کند. پس از مرتب سازی نامغلوب، پیشانی های پرتو حاصل می شوند و به ذراتی که در پیشانی پرتو اول باشند مقدار شایستگی 1 داده می شود، به ذرات پیشانی پرتو دوم مقدار شایستگی 2 داده می شود و به باقیمانده ذرات به همین طریق شایستگی انتساب می شود. علاوه بر این به هر ذره با توجه به فاصله ازدحام شایستگی تعلق می گیرد. از فاصله ازدحام جهت حفظ تنوع جمعیت استفاده می شود. تجربه سراسری هر ذره بصورت تصادفی از پیشانی پرتو نخست انتخاب می شود و ذراتی که دارای بیشترین شایستگی باشند برای نسل آینده انتخاب می شوند.

مهفوف¹⁹ و همکاران الگوریتم AWPSO²⁰ [10] را ارائه دادند که بر پایه الگوریتم PSO [9] و وزن های تطبیقی است. قابلیت جستجوی AWPSO توسط عواملی از جمله گنجاندن عامل وزن اینرسی تطبیقی و فاکتور شتاب توسعه یافته است و برای انتخاب هر چه بهتر، بهترین تجربه سراسری و بهترین تجربه شخصی از تابع تجمیع وزن دار استفاده شده است، همچنین از الگوریتم مرتب سازی نامغلوب برای انتخاب ذرات در هر تکرار از الگوریتم استفاده می شود.

در بخش دوم از این مطالعه به تشریح الگوریتم پیشنهادی و اجزای مختلف این الگوریتم از جمله عملگر تقاطع احتمالی، عملگر جهش دوسویه و عملگر انتخاب پرداخته می شود. همچنین در پایان بخش دوم از این مطالعه پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش سوم از این مطالعه نتایج شبیه سازی الگوریتم های SPEA2، NSGAI، NSPSO، AWPSO و الگوریتم پیشنهادی قرار گرفته است. در بخش چهارم از این مطالعه به نتیجه گیری از نتایج حاصل از بخش سوم (شبیه سازی) پرداخته شده است.

2. الگوریتم بهینه سازی چند هدفه بر پایه جهش دوسویه و تقاطع احتمالی

ساختار الگوریتم پیشنهادی بر اساس الگوریتم های تکاملی [11] است. ساختار الگوریتم های تکاملی بر پایه سه عملگر از جمله جهش²¹، آمیزش²² و انتخاب²³ بنا شده است. الگوریتم پیشنهادی از عملگر جهش دوسویه²⁴ پیشنهادی برای اکتشاف²⁵ در فضای جستجو و از عملگر تقاطع احتمالی پیشنهادی برای استخراج²⁶ در فضای جستجو، جهت تولید فرزندان از جمعیت والدین بهره می گیرد. عملگر انتخاب الگوریتم پیشنهادی از راهبردهایی از جمله مرتب سازی نامغلوب [6] و فاصله ازدحام [6] استفاده می کند. تفاوت الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم NSGAI در عملگرهای جهش و آمیزش است، بطوریکه NSGAI از جهش چندجمله ای و آمیزش دودویی شبیه سازی شده استفاده می کند [6] ولی در راستای ارتقای کارایی همگرایی و تنوع راه حل ها در الگوریتم پیشنهادی از جهش دوسویه پیشنهادی و تقاطع احتمالی پیشنهادی استفاده می شود. فلوچارت الگوریتم پیشنهادی مطابق شکل 1 است.



شکل 1: فلوچارت الگوریتم پیشنهادی

¹⁹ Mahfouf

²⁰ Adaptive Weighted PSO

²¹ Mutation

²² Crossover

²³ Selection

²⁴ Bidirectional

²⁵ Exploration

²⁶ Exploitation

در ادامه به تشریح اجزاء مختلف الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. همچنین در پایان این بخش به محاسبه پیچیدگی زمانی²⁷ الگوریتم پیشنهادی پرداخته می‌شود.

1.2 عملگر تقاطع احتمالی

عملگر تقاطع احتمالی²⁸ پیشنهادی به گونه‌ای عمل می‌کند که در هر نسل، دو راه‌حل بصورت تصادفی از جمعیت والدین انتخاب می‌شوند و یک فرزند مطابق رابطه 1 تولید می‌شود.

$$\text{child} = \lambda_1 \text{Parent1} + \lambda_2 \text{Parent2} \quad \text{رابطه (1)}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 \in U[0,1], \lambda_2 \in U[0,1 - \lambda_1]$$

λ_1 یک عدد تصادفی حقیقی مابین صفر و یک با توزیع یکنواخت است و λ_2 یک عدد تصادفی حقیقی مابین صفر و $1 - \lambda_1$ با توزیع یکنواخت است. اجرای عملگر تقاطع احتمالی پیشنهادی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تعداد فرزندان حاصل از این عملگر به P_c (نرخ آمیزش) درصد از راه‌حل‌های جمعیت والدین برسند.

2.2 عملگر جهش دوسویه

عملگر جهش دوسویه²⁹ پیشنهادی، $\frac{(1-P_c)}{2}$ درصد از راه‌حل‌های جمعیت والدین را بصورت تصادفی انتخاب نموده و به ازاء هر راه‌حل انتخاب شده از جمعیت والدین، دو فرزند مطابق مراحل زیر تولید می‌کند:

(1) دو کپی از راه‌حل موجود در راه‌حل‌های child1 و child2 قرار بده

(2) به ازاء هر درایه از راه‌حل یک عدد تصادفی یکنواخت مابین صفر و یک ایجاد شود آنگاه به ازاء هر درایه‌ای که عدد تصادفی آن از

نرخ جهش (P_m) کمتر باشد، راه‌حل‌های child1 و child2 مطابق رابطه 2 بروز رسانی شود.

$$\begin{aligned} \text{child1}_i &= \text{child1}_i - U(0, \text{child1}_i - \text{LowerBound}_i) \\ \text{child2}_i &= \text{child2}_i + U(0, \text{UperBound}_i - \text{child2}_i) \end{aligned} \quad \text{رابطه (2)}$$

قابل توجه است که child1_i به معنای درایه i -ام از راه‌حل child1 است. با توجه به رابطه 2 به ازاء انتخاب هر درایه از راه‌حل، مقدار درایه مورد نظر از راه‌حل، حول حد پایین و حد بالا بصورت تصادفی تغییر می‌کند. از آنجا که تغییر در درایه مورد جهش، هم رو به جلو و هم رو به عقب صورت می‌گیرد، آن را جهش دوسویه می‌نامیم.

3.2 عملگر انتخاب

عملگر انتخاب³⁰ استفاده شده در الگوریتم پیشنهادی مطابق با عملگر انتخاب الگوریتم NSGAI است [6]. از روش‌هایی از جمله مرتب سازی نامغلوب و فاصله ازدحام جهت انتخاب راه‌حل‌های نسل آینده در عملگر انتخاب الگوریتم پیشنهادی استفاده شده است. مرتب ساختن راه‌حل‌های نامغلوب یک جمعیت بر اساس تقسیم جمعیت به چندین سطح نامغلوب صورت می‌گیرد. بهترین راه‌حل‌های نامغلوب، راه‌حل‌های نامغلوب سطح 1 نامیده می‌شوند. به منظور یافتن راه‌حل‌های نامغلوب سطح بعدی، معمولاً از یک رویه ساده تبعیت می‌شود. زمانی که بهترین مجموعه نامغلوب مشخص گردید، آنها را بطور موقت در جمعیت نادیده می‌گیرند. راه‌حل‌های نامغلوب جمعیت باقیمانده نیز یافت شده و راه‌حل‌های نامغلوب سطح 2 نامیده می‌شوند. به منظور یافتن راه‌حل‌های نامغلوب سطح 3، همه راه‌حل‌های نامغلوب سطح 1 و 2 نادیده گرفته شده و به یافتن راه‌حل‌های نامغلوب جدید پرداخته می‌شود. این رویه ادامه پیدا می‌کند تا این که هر یک از اعضای جمعیت، در یک سطح نامغلوب قرار گیرند. یادآوری این مطلب مهم است که راه‌حل‌های نامغلوب سطح 1 از راه‌حل‌های نامغلوب سطح 2 بهتر هستند و به همین ترتیب برای سطوح بعدی این چنین است. برای بدست آوردن تخمینی از چگالی راه‌حل‌های موجود در کنار یک راه‌حل خاص مانند راه‌حل i در جمعیت، یک میانگین فاصله از دو راه‌حل واقع در طرفین راه‌حل i برای هر کدام از M تابع هدف محاسبه می‌کنیم. مقدار عددی d_i که از این محاسبه تقریبی فضای مکعبی اطراف راه‌حل i با بکار بردن نزدیکترین همسایه‌های آن بدست می‌آید را

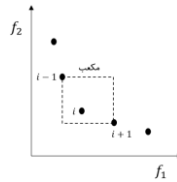
²⁷ Time complexity

²⁸ Probabilistic crossover operator

²⁹ Bidirectional mutation operator

³⁰ Selection operator

فاصله ازدحام می‌نامند. در شکل 2 فاصله ازدحام i -امین راه‌حل برابر است با میانگین طول طرفین مستطیل واقع در دو رأس روبرویی (که با خط تیره نشان داده شده است). لازم به ذکر است که راه‌حل‌های کرانی دارای بیشینه فاصله ازدحام هستند. راه‌حل‌های کرانی به راه‌حلهایی گفته می‌شوند که در یکی از اهداف نسبت به سایر راه‌حل‌ها دارای بیشینه مقدار هستند.



شکل 2: محاسبه فاصله ازدحام

عملگر انتخاب الگوریتم پیشنهادی، ابتدا جمعیت والدین و فرزندان حاصل از عملگرهای جهش و آمیزش را مرتب‌سازی نامغلوب می‌نماید و هر راه‌حل را در سطح مناسب خود قرار می‌دهد. سپس از سطح 1 شروع به انتخاب راه‌حل‌ها می‌نماید و بعد سطح دوم و الی آخر تا زمانی که تعداد راه‌حل‌های انتخاب شده با تعداد راه‌حل‌های جمعیت والدین برابر شود. قابل توجه است که اگر تعداد راه‌حل‌های آخرین سطحی که راه‌حل‌ها از آن انتخاب می‌شوند بیشتر از ظرفیت جمعیت والدین باشد باید دقت بیشتری در انتخاب راه‌حل‌ها نمود و راه‌حلهایی را حفظ کرد که در ناحیه‌ای با ازدحام کمتری قرار دارند. در واقع برای رعایت اصل چگالی در بین راه‌حل‌ها، راه‌حلهایی که در ناحیه ازدحامی کوچکتری هستند برای پر کردن جمعیت والدین نسل آینده در اولویت قرار دارند.

4.2 پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی

با توجه به توضیحات داده شده در مورد الگوریتم پیشنهادی، الگوریتم عملگر تقاطع احتمالی پیشنهادی، الگوریتم عملگر جهش دوسویه پیشنهادی و الگوریتم عملگر انتخاب با فرض اینکه n برابر با تعداد راه‌حل‌های جمعیت والدین یا تعداد راه‌حل‌های جمعیت فرزندان است و همچنین m برابر با تعداد درایه هر راه‌حل است، پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی مطابق جدول 1 محاسبه می‌شود. پیچیدگی زمانی عملگر تقاطع احتمالی پیشنهادی به علت اینکه به تعداد $P_c \cdot n$ بار فرزند تولید می‌کند، برابر با $O(P_c \cdot n)$ است. پیچیدگی زمانی عملگر جهش دوسویه پیشنهادی به علت اینکه به تعداد $\frac{1-P_c}{2} \cdot n$ بار دو فرزند تولید می‌کند و همچنین در بدترین حالت امکان جهش تمامی ابعاد (m) وجود دارد، برابر با $O(\frac{1-P_c}{2} \cdot m \cdot n)$ است. عملگر انتخاب دارای پیچیدگی زمانی برابر با $O(N^2)$ است [12]. در نتیجه پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی برابر با $O(N^2)$ است.

جدول 1: پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم	پیچیدگی زمانی
الگوریتم جهش دوسویه	$O\left(\frac{1-P_c}{2} \cdot m \cdot n\right) = O(n)$
الگوریتم تقاطع احتمالی	$O(P_c \cdot n) = O(n)$
الگوریتم عملگر انتخاب	$O(n^2)$
الگوریتم پیشنهادی	$O(n + n + n^2) = O(n^2)$

3. نتایج شبیه سازی

در این بخش، الگوریتم پیشنهادی را با الگوریتم‌های چند هدفه‌ای از جمله [5] SPEA، [6] NSGAI، [8] NSPSO و [10] AWPSO مقایسه می‌کنیم. برای ارزیابی الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه از مسائل آزمون^{۳۱} ZDT [13] از جمله ZDT1، ZDT2، ZDT3 و ZDT4 استفاده می‌کنیم. مسئله آزمون ZDT1، یک مسئله 30 متغیره (n=30) بوده و پیشانی بهینه پرتو در آن محدب^{۳۲} است. مسئله آزمون ZDT2، یک مسئله 30 متغیره بوده (n=30) و پیشانی بهینه پرتو متناظر با آن نامحدب^{۳۳} است. مسئله آزمون ZDT3، یک مسئله 30 متغیره (n=30) بوده و پیشانی بهینه پرتو در آن ناپیوسته است. مسئله آزمون ZDT4، یک مسئله 10 متغیره (n=10) بوده و دارای تعداد زیادی پیشانی بهینه پرتو^{۳۴} محلی است. پیشانی بهینه پرتو تابع آزمون ZDT4 محدب است. برای مقایسه کارایی الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه بر روی مسائل آزمون از معیارهای ارزیابی^{۳۵} از جمله معیار فاصله نسلی (GD)^{۳۶} و معیار گسترش^{۳۷} (Δ) استفاده می‌کنیم که در [12] معرفی شده‌اند. معیار فاصله نسلی بیانگر همگرایی راه‌حل‌های حاصل از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه به پیشانی بهینه پرتو مسئله آزمون مورد نظر است. معیار فاصله نسلی، میانگین فاصله راه‌حل‌های (Q) حاصل از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه را از پیشانی بهینه پرتو (P^*) پیدا می‌کند. روشن است که الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه‌ای که فاصله نسلی کوچکتری داشته باشد، الگوریتم بهتری خواهد بود. معیار گسترش بیانگر تنوع راه‌حل‌های حاصل از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه است. معیار گسترش، تنوع راه‌حل‌های (Q) حاصل از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه را محک می‌زند. مقدار معیار گسترش برای یک توزیع ایده‌آل برابر صفر خواهد شد. مسلم است که الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه‌ای، ارزیابی بهتری خواهد داشت که در هر دو معیار نسبت به سایر الگوریتم‌ها بهتر باشد. روابط معیار فاصله نسلی (GD) و معیار گسترش (Δ) برای دو تابع هدف در جدول 2 قرار گرفته است. در جدول 3، روابط توابع آزمون ZDT و همچنین مجموعه بهینه پرتو^{۳۸} و پیشانی بهینه پرتو قرار گرفته است.

جدول 2: روابط مربوط به معیار گسترش و معیار فاصله نسلی

معیار Δ	معیار GD
$\Delta = \frac{\sum_{m=1}^2 d_m^e + \sum_{i=1}^{ Q } d_i - \bar{d} }{\sum_{m=1}^2 d_m^e + Q \bar{d}}$	$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{ Q } d_i^2}}{ Q }$
Where	Where
$d_i = \text{Euclidean_distance}(Q(i), Q(i+1))$	$d_i = \min_{k=1}^{ P^* } \text{Euclidean_distance}(Q(i), P^*(k))$
$\bar{d} = \frac{1}{(Q - 1)} \sum_{i=1}^{(Q -1)} d_i$	

³¹ Test problems

³² Convex

³³ Nonconvex

³⁴ Pareto Optimal Fronts(POF)

³⁵ Evaluation metrics

³⁶ Generation distance

³⁷ Spread

³⁸ Pareto Optimal Set(POS)

جدول 3: توابع آزمون ZDT به همراه مجموعه بهینه پرتو و پیشانی بهینه پرتو

مجموعه بهینه پرتو و پیشانی بهینه پرتو	تابع آزمون
<p>POS: (x_1, x_i) with $x_1 \in [0,1]$ and $x_i = 0$ Where $i \in \{2,3, \dots, n\}$ POF: (f_1, f_2) with $f_1 \in [0,1]$ and $f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$</p>	$ZDT1 = \begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = g(x)h(f_1, g(x)) \\ g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i \\ h(f_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in [0,1] \end{cases}$
<p>POS: (x_1, x_i) with $x_1 \in [0,1]$ and $x_i = 0$ Where $i \in \{2,3, \dots, n\}$ POF: (f_1, f_2) with $f_1 \in [0,1]$ and $f_2 = 1 - f_1^2$</p>	$ZDT2 = \begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = g(x)h(f_1, g(x)) \\ g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i \\ h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^2 \\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in [0,1] \end{cases}$
<p>POS: (x_1, x_i) with $x_1 \in S$, $x_i = 0$ Where $S \in (0,0.083] \cup (0.182,0.257] \cup$ and $(0.409,0.453] \cup (0.618,0.652] \cup (0.823,0.851]$ $i \in \{2,3, \dots, n\}$ POF: (f_1, f_2) with $f_1 \in F$ and f_2 $= 1 - \sqrt{f_1} - f_1 \sin(10\pi f_1)$ Where $F \in (0,0.083] \cup (0.182,0.257]$ $\cup (0.409,0.453] \cup (0.618,0.652]$ $\cup (0.823,0.851]$</p>	$ZDT3 = \begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = g(x)h(f_1, g(x)) \\ g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i \\ h(f_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} - \left(\frac{f_1}{g}\right) \sin(10\pi f_1) \\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in [0,1] \end{cases}$
<p>POS: (x_1, x_i) with $x_1 \in [0,1]$ and $x_i = 0$ Where $i \in \{2,3, \dots, n\}$ POF: (f_1, f_2) with $f_1 \in [0,1]$ and $f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$</p>	$ZDT4 = \begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = g(x)h(f_1, g(x)) \\ g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) \\ h(f_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \\ x_1 \in [0,1], \{x_2, \dots, x_n\} \in [-5,5] \end{cases}$

در جدول 4 پارامترهای مربوط به اجرای الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه قرار گرفته شده است. قابل توجه است که تعداد راه‌حل‌های جمعیت پیشانی بهینه پرتو جهت محاسبه معیارهای فاصله نسلی و گسترش مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار نرخ آمیزش برای الگوریتم پیشنهادی برابر با 0.7 در نظر گرفته شده است. همچنین مقدار نرخ جهش برای الگوریتم پیشنهادی برابر با $\frac{1}{n}$ (تعداد ابعاد راه‌حل مسئله آزمون) در نظر گرفته شده است.

جدول 4: پارامترهای مربوط به اجرای الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه

100	تعداد راه‌حل جمعیت والدین
250	تعداد نسل ایجاد شده
30	تعداد اجرای الگوریتم
1000	تعداد راه‌حل‌های جمعیت پیشانی بهینه پرتو

قابل توجه است که با مشاهده راه‌حل‌های حاصل از الگوریتم‌های چند هدفه بهینه‌سازی نمی‌توان قضاوت صحیحی از برتری الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه نسبت به هم داشت، در نتیجه استفاده از معیارهای ارزیابی و همچنین آزمون‌های آماری می‌تواند ما را در قضاوت هر چه بهتر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه کمک کند. در جدول 5 نتایج حاصل از اجرای الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه از جمله میانگین³⁹ و واریانس⁴⁰ برای معیار فاصله نسلی و معیار گسترش به ازاء 30 اجرا بر روی مسائل آزمون ZDT1، ZDT2، ZDT3 و ZDT4 و ZDT4 قرار دارد.

جدول 5: نتایج حاصل از اجرای الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه

معیار Δ		معیار GD		تابع آزمون ZDT1	
واریانس	میانگین	واریانس	میانگین	الگوریتم	
9.07e-3	0.374	1.11e-9	1.17e-4	پیشنهادی	
1.58e-2	0.730	0	1.25e-3	SPEA	
4.16e-2	0.463	0	8.94e-4	NSGAI	
3.00e-2	0.767	4.18e-5	7.53e-4	NSPSO	
1.71e-3	0.759	2.61e-9	1.01e-4	AWPSO	
معیار Δ		معیار GD		تابع آزمون ZDT2	
واریانس	میانگین	واریانس	میانگین	الگوریتم	
8.65e-4	0.374	1.06e-10	5.13e-5	پیشنهادی	
4.48e-3	0.678	2.00e-5	3.04e-3	SPEA	
2.46e-2	0.435	0	8.24e-4	NSGAI	
2.77e-2	0.758	3.05e-5	8.05e-4	NSPSO	
4.92e-3	0.758	1.49e-9	1.21e-4	AWPSO	
معیار Δ		معیار GD		تابع آزمون ZDT3	
واریانس	میانگین	واریانس	میانگین	الگوریتم	
9.87e-4	0.550	3.34e-10	9.27e-5	پیشنهادی	
6.66e-4	0.666	1.0e-5	4.42e-2	SPEA	
5.08e-3	0.576	4.20e-5	4.34e-2	NSGAI	
5.81e-2	0.869	2.54e-4	3.40e-3	NSPSO	
1.10e-2	0.891	2.85e-9	5.20e-4	AWPSO	
معیار Δ		معیار GD		تابع آزمون ZDT4	
واریانس	میانگین	واریانس	میانگین	الگوریتم	
3.84e-2	0.585	9.59e-5	3.51e-3	پیشنهادی	
1.13e-2	0.732	11.32	9.51	SPEA	
1.98e-1	0.655	4.67e-2	2.92e-2	NSGAI	
3.57e-2	0.768	6.91e-5	7.82e-4	NSPSO	
3.00e-3	0.680	3.92e-8	5.34e-4	AWPSO	

از الگوریتم t-test [14, 15] به عنوان آزمون آماری⁴¹ برای صحت مقایسه مابین دو الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه استفاده می‌شود. جدول 6 بیانگر فرض مورد قبول (فرض صفر یا فرض یک) مربوط به مقایسه نتایج هر جفت الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه بر اساس الگوریتم t-test است.

³⁹ Mean

⁴⁰ Variance

⁴¹ Statistical test

جدول 6: فرض مورد قبول مربوط به مقایسه نتایج هر جفت الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه بر اساس الگوریتم t-test

ZDT1 تابع آزمون											
معیار Δ						معیار GD					
AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم	AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم
H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی	H_0	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی
H_0	H_0	H_1	H_0	H_1	SPEA	H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	SPEA
H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI	H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI
H_0	H_0	H_1	H_0	H_1	NSPSO	H_1	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO
H_0	H_0	H_1	H_0	H_1	AWPS O	H_0	H_1	H_1	H_1	H_0	AWPS O
ZDT2 تابع آزمون											
معیار Δ						معیار GD					
AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم	AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم
H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی	H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی
H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	SPEA	H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	SPEA
H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI	H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI
H_0	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO	H_1	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO
H_0	H_0	H_1	H_1	H_1	AWPS O	H_0	H_1	H_1	H_1	H_1	AWPS O
ZDT3 تابع آزمون											
معیار Δ						معیار GD					
AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم	AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم
H_1	H_1	H_0	H_1	H_0	پیشنهادی	H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی
H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	SPEA	H_1	H_1	H_0	H_0	H_1	SPEA
H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI	H_1	H_1	H_0	H_0	H_1	NSGAI
H_0	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO	H_1	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO
H_0	H_1	H_1	H_1	H_1	AWPS O	H_0	H_1	H_1	H_1	H_1	AWPS O
ZDT4 تابع آزمون											
معیار Δ						معیار GD					
AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم	AWPS O	NSPS O	NSGAI I	SPE A	پیشنهاد ی	الگوریتم
H_1	H_1	H_0	H_1	H_0	پیشنهادی	H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	پیشنهادی
H_0	H_0	H_0	H_0	H_1	SPEA	H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	SPEA
H_0	H_0	H_0	H_0	H_0	NSGAI	H_1	H_1	H_0	H_1	H_1	NSGAI
H_0	H_0	H_0	H_0	H_1	NSPSO	H_1	H_0	H_1	H_1	H_1	NSPSO
H_0	H_0	H_0	H_0	H_1	AWPS O	H_0	H_1	H_1	H_1	H_1	AWPS O

برای گرفتن آزمون آماری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه باید نتایج حاصل از حداقل 30 اجرای [16] دو الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه و درجه معنادار بودن (α) ، به عنوان ورودی به الگوریتم t-test داده شود. مقدار درجه معنادار بودن (α) بیانگر درصدی از حساسیت

آزمون آماری الگوریتم t-test است که معمولاً بطور پیش فرض برابر با 0.05 است که در این مطالعه همین مقدار برای تمامی شبیه‌سازی‌ها در نظر گرفته شده است. پس از اعمال ورودی‌ها به الگوریتم t-test، فرض صفر^{۴۲} توسط الگوریتم t-test رد^{۴۳} یا قبول می‌شود. اگر فرض صفر پذیرفته شد آنگاه این امر نشان دهنده این است که میانگین خروجی دو الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه با هم یکسان است (تفاوت معنادار نیست) یا به عبارت دیگر خروجی‌های الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه اول بیشتر از 5٪ به خروجی‌های الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه دوم شباهت دارد. اگر فرض صفر رد شود (فرض یک قبول شود) آنگاه این امر نشان دهنده این است که میانگین خروجی دو الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه با هم یکسان نیست (تفاوت معنادار است) یا به عبارت دیگر خروجی‌های الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه اول کمتر از 5٪ به خروجی‌های الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه دوم شباهت دارد.

4. نتیجه‌گیری

از جدول 5 که شامل نتایج حاصل از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه از جمله میانگین و واریانس حاصل از 30 اجرا بوده است به تنهایی نمی‌توان قضاوت صحیحی را مابین الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه انجام داد در نتیجه برای مقایسه الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه ابتدا باید به جدول 6 که بیانگر نتایج الگوریتم t-test است توجه نمود. جدول 6، فرض مورد قبول به ازاء مقایسه نتایج حاصل از دو الگوریتم برای معیار مربوطه بر روی مسئله آزمون مربوطه را نشان می‌دهد. اگر فرض صفر قبول شود آنگاه بیانگر مساوی بودن نتایج حاصل از دو الگوریتم برای معیار مربوطه بر روی مسئله آزمون مربوطه است و اگر فرض یک قبول شود آنگاه بیانگر مساوی نبودن نتایج حاصل از دو الگوریتم برای معیار مربوطه بر روی مسئله آزمون مربوطه است. برای امتیازدهی و رتبه بندی الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه بر اساس نتایج حاصله موجود در جداول 4 و 5 از قوانین پیشنهادی زیر استفاده می‌کنیم:

- اگر الگوریتم t-test فرض یک را برای نتایج حاصل از دو الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه قبول کرد آنگاه الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه‌ای که میانگین بهتری را نسبت به معیار ارزیابی مربوطه داشت، یک امتیاز به امتیازاتش اضافه می‌شود
- الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه بر اساس بیشترین تا کمترین امتیاز به ترتیب رتبه بندی می‌شوند، به عبارت دیگر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه‌ای که بیشترین امتیاز را داراست دارای رتبه یک است و به همین ترتیب الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه تا آخرین رتبه، رتبه بندی می‌شوند

با توجه به نتایج حاصل از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه موجود در جدول 5 و نتایج آماری حاصل از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه موجود در جدول 6 و همچنین قوانین پیشنهادی، جدول 7 در راستای امتیاز دهی و رتبه بندی الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه و مسئله آزمون مربوطه ارائه می‌شود. ستون 'امتیاز' در جدول 7 بیانگر امتیاز هر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه بر روی تابع آزمون مربوطه است، به عنوان مثال اگر میانگین حاصل از معیار ارزیابی مربوطه بر روی تابع آزمون مربوطه برای الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه‌ای نسبت به 4 الگوریتم دیگر بهتر باشد و فرض یک برای تمامی این مقایسات قابل قبول باشد آنگاه به الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه غالب امتیاز 4 داده می‌شود. ستون 'رتبه' در جدول 7 بیانگر رتبه هر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه بر روی مسئله آزمون مربوطه است، به عنوان مثال الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه‌ای که بیشترین امتیاز را در معیار ارزیابی مربوطه بر روی تابع آزمون مربوطه را کسب کرده است، رتبه یک را به خود اختصاص می‌دهد. برای حصول یک نتیجه جامع‌تر نیاز به تحلیل جامع‌تر است. جدول 8 تحلیلی جامع‌تر از جدول 7 است. ستون 'امتیاز' در جدول 8 بیانگر امتیاز هر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه بر روی تمامی مسائل آزمون است. ستون 'رتبه' در جدول 8 بیانگر رتبه هر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه بر روی تمامی مسائل آزمون است.

⁴² Null hypothesis

⁴³ Reject

جدول 7: امتیاز و رتبه هر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه با توجه به معیار ارزیابی مربوطه و مسئله آزمون مربوطه

ZDT2 تابع آزمون					ZDT1 تابع آزمون				
Δ معیار		GD معیار		الگوریتم	Δ معیار		GD معیار		الگوریتم
رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز		رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	
1	4	1	4	پیشنهادی	1	4	1	3	پیشنهادی
3	2	5	0	SPEA	3	0	4	0	SPEA
2	3	4	1	NSGAI	2	3	3	1	NSGAI
4	0	3	2	NSPSO	3	0	2	2	NSPSO
4	0	2	3	AWPSO	3	0	1	3	AWPSO
ZDT4 تابع آزمون					ZDT3 تابع آزمون				
Δ معیار		GD معیار		الگوریتم	Δ معیار		GD معیار		الگوریتم
رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز		رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	
1	3	3	2	پیشنهادی	1	3	1	4	پیشنهادی
2	0	5	0	SPEA	2	2	4	0	SPEA
2	0	4	1	NSGAI	1	3	4	0	NSGAI
2	0	2	3	NSPSO	3	0	3	2	NSPSO
2	0	1	4	AWPSO	3	0	2	3	AWPSO

از جدول 6 به نتایج زیر رسیدیم:

- معیار GD الگوریتم پیشنهادی و AWPSO بر روی تابع آزمون ZDT1 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف دو الگوریتم در معیار فاصله نسلی برای تابع آزمون ZDT1، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار GD الگوریتم NSGAI و SPEA بر روی تابع آزمون ZDT3 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف دو الگوریتم در معیار فاصله نسلی برای تابع آزمون ZDT3، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار Δ الگوریتم NSPSO و AWPSO با هم برابر است زیرا الگوریتم آماری t-test به ازاء نتایج مختلف دو الگوریتم در معیار گستردگی برای تمامی توابع آزمون، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار Δ الگوریتم SPEA، NSPSO و AWPSO بر روی تابع آزمون ZDT1 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف سه الگوریتم در معیار گستردگی برای تابع آزمون ZDT1، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار Δ الگوریتم پیشنهادی و NSGAI بر روی تابع آزمون ZDT3 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف سه الگوریتم در معیار گستردگی برای تابع آزمون ZDT3، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار Δ الگوریتم SPEA، NSGAI، NSPSO و AWPSO بر روی تابع آزمون ZDT4 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف سه الگوریتم در معیار گستردگی برای تابع آزمون ZDT4، فرض صفر را قبول کرده است
- معیار Δ الگوریتم پیشنهادی و NSGAI بر روی تابع آزمون ZDT4 با هم برابر است زیرا الگوریتم t-test به ازاء نتایج مختلف سه الگوریتم در معیار گستردگی برای تابع آزمون ZDT4، فرض صفر را قبول کرده است

همچنین از جدول 8 که تحلیل جامعی از جدول 7 است به نتایج زیر می‌رسیم:

- الگوریتم پیشنهادی در معیار فاصله نسلی و معیار گستردگی بر روی تمامی توابع آزمون در مقایسه با سایر الگوریتم‌های چند هدفه رتبه نخست را کسب کرده است

- بعد از الگوریتم پیشنهادی و AWPSO که هر دو رتبه نخست را در معیار فاصله نسلی کسب کرده‌اند، به ترتیب الگوریتم‌های NSPSO، NSGAI و SPEA رتبه‌های دوم تا چهارم را کسب نمودند
 - بعد از الگوریتم پیشنهادی که رتبه نخست را در معیار گستردگی کسب کرده است، به ترتیب الگوریتم‌های NSGAI و SPEA رتبه‌های دوم تا سوم را کسب نمودند و الگوریتم‌های NSPSO و AWPSO با امتیازهای یکسان رتبه چهارم را کسب نمودند
- در مطالعه بعدی قصد داریم که الگوریتم پیشنهادی را در راستای ارتقای همگرایی و تنوع توسعه دهیم. برای توسعه همگرایی، کاهش سطوح حاصل از مرتب سازی نامغلوب به یک سطح، پیشنهاد داده می‌شود. اگر تنها از سطح یک حاصل از مرتب سازی نامغلوب استفاده کرد آنگاه فرزندان حاصل در نسل بعد بر پایه راه‌حل‌های نخبه نسل گذشته به وجود می‌آیند و این امر می‌تواند سبب بهبود همگرایی شود. از طرفی دیگر برای توسعه تنوع، استفاده از مفهوم معیار گستردگی و تجهیز الگوریتم به فرآیند آن سنچس، پیشنهاد می‌شود.

جدول 8: تحلیلی جامع از رتبه و امتیاز الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه

معیار Δ		معیار GD		الگوریتم
رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	
1	14	1	13	پیشنهادی
3	4	4	0	SPEA
2	9	3	3	NSGAI
4	0	2	9	NSPSO
4	0	1	13	AWPSO

مراجع

- [1] Ayala, H., Vicente, H., Keller, P., Morais, M.d.F., Mariani, V.C., Coelho, L.d.S., and Rao, R.V., 'Design of heat exchangers using a novel multiobjective free search differential evolution paradigm', Applied Thermal Engineering, 2016
- [2] Hosseini, S.A., Amjady, N., Shafie-khah, M., and Catalão, J.P.S., 'A new multi-objective solution approach to solve transmission congestion management problem of energy markets', Applied Energy, 2016
- [3] Lam, P.A.K., and Prakash, K.A., 'Thermodynamic investigation and multi-objective optimization for jet impingement cooling system with Al₂O₃/water nanofluid', Energy Conversion and Management, 2016
- [4] Chibeles-Martins, N., Pinto-Varela, T., Barbosa-Póvoa, A.P., and Novais, A.Q., 'A multi-objective meta-heuristic approach for the design and planning of green supply chains - MBSA', Expert Systems with Applications, 2016
- [5] Zitzler, E., and Thiele, L., 'Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach', IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999
- [6] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T., 'A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II', IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002
- [7] Srinivas, N., and Deb, K., 'Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms', Evolutionary Computation, 1994
- [8] Li, X., 'A Non-dominated Sorting Particle Swarm Optimizer for Multiobjective Optimization', 2003
- [9] Kennedy, J., and Eberhart, R., 'Particle swarm optimization', 1995
- [10] Mahfouf, M., Chen, M.Y., and Linkens, D.A., 'Adaptive Weighted Particle Swarm Optimisation for Multi-objective Optimal Design of Alloy Steels', 2004
- [11] Engelbrecht, A.P., 'Introduction to Computational Intelligence', Wiley, 2007
- [12] Deb, K., 'Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms', Wiley, 2001
- [13] Zitzler, E., Deb, K., and Thiele, L., 'Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results', Evol Comput, 2000
- [14] Ott, R.L., and Longnecker, M.T., 'An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis (Available 2010 Titles Enhanced Web Assign)', Duxbury Press, 2010
- [15] Ramachandran, K.M., and Tsokos, C.P., 'Mathematical Statistics with Applications', Academic Press, 2009, 1st Edition, 2009