

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۲۹

پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۹/۰۳

نوع مقاله: پژوهشی

جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال

علیرضا باقری*

دانشیار دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران
پست الکترونیکی: ar_bagheri@aut.ac.ir

محمد حسین زاده مقدم

دانشکده مهندسی کامپیوتر، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
پست الکترونیکی: mh.moghaddam@yahoo.com

۱- مقدمه

مسئله جداسازی نقاط یکی از مسائل بنیادی و کاربردی در هندسه محاسباتی است. در این مسئله، دو مجموعه از نقاط رنگی (آبی و قرمز) P و Q و یک شکل هندسی خاص در صفحه در نظر گرفته شده است و هدف عبارت است از پوشش نقاط آبی P توسط آن شکل هندسی خاص به‌طوری‌که هیچ کدام از نقاط قرمز Q پوشش داده نشوند. البته نسخه‌های متعددی از مسئله جداسازی پایه تعریف شده است که در آنها به دنبال بهینه نمودن پارامترهای مختلف شکل جداساز (مثل محیط، مساحت و تعداد اضلاع) می‌باشند. تفکیک‌پذیری نقاط دارای کاربردهای مختلفی در زمینه‌های پردازش تصویر، آمار و دسته‌بندی اطلاعات، داده کاوی، گرافیک کامپیوتری و طراحی چیدمان VLSI می‌باشد [۱-۵].

تحقیقات قابل توجهی در زمینه جداسازی انجام شده است. در سال ۱۹۸۳ مسئله جداسازی نقاط رنگی توسط خط با یک الگوریتم دارای زمان خطی حل شد [۶] و همچنین مسئله جداسازی نقاط توسط دایره توسط

چکیده

دو مجموعه رنگی از نقاط (آبی و قرمز) P و Q را بر روی صفحه در نظر بگیرید، مسئله تفکیک‌پذیری نقاط هدف عبارت است از جداسازی نقاط قرمز از نقاط آبی توسط یک مستطیل مینیمال به‌طوری‌که همه نقاط آبی در داخل مستطیل و همه نقاط قرمز در خارج از مستطیل قرار بگیرند. مستطیل مینیمال برای مجموعه نقاط P مستطیلی است که هر چهار ضلع آن بر بدنه محدب P مماس باشند. در این مقاله کارهای قبلی برای چندخطی‌ها توسعه داده شده است. عملاً به‌جای جداسازی نقاط، جداسازی چندخطی‌ها مدنظر ما است. کاربرد مهم جداسازی چندخطی‌ها در کلاس‌بندی اشیایی که به‌جای نقطه با پاره خط یا چندضلعی توصیف می‌شوند، مطرح می‌شود. زمان اجرای الگوریتم ما $O(N^2 * \log N)$ است که $N = n + m$ و n تعداد خطوط آبی در مجموعه P و m تعداد خطوط قرمز در مجموعه Q است.

واژه‌های کلیدی: هندسه محاسباتی، جداسازی، مجموعه نقاط رنگی، الگوریتم، چند خطی، مستطیل.

نشان دادند که می‌توان دو مجموعه چند خطی رنگی با N پاره خط را با الگوریتمی با زمان اجرای $O(N \log N)$ جدا کرد.

در سال ۲۰۰۹ ون کرولد و همکارانش [۱۹] مسئله تفکیک‌پذیری دو مجموعه نقطه قرمز و آبی P و Q را با مستطیل مطرح کردند. فرض کنید P و Q مجموعه نقاط قرمز و آبی به اندازه کلی n باشند. در این مسئله هدف آن است که کلیه زوایایی که مستطیل تفکیک‌کننده وجود دارد را گزارش کنیم. منظور از مستطیل تفکیک‌کننده مستطیلی است که کلیه نقاط آبی داخل آن و کلیه نقاط قرمز خارج از آن قرار می‌گیرند و هر چهار ضلع مستطیل بر بدنه محدب P عمود باشند.

مادر این مقاله کارون کرولد و همکارانش [۱۹] را توسعه می‌دهیم و در صدد جداسازی چندخطی‌های رنگی هستیم. الگوریتم ارائه شده توسط ایشان فقط برای جداسازی نقاط قابل استفاده است و اگر اشیای رنگی که قرار است جدا شوند به جای نقطه با پاره‌خط یا چندضلعی مدل شوند، نمی‌توان از الگوریتم ایشان استفاده کرد و دنیای واقعی وقتی بخواهیم اشیاء را روی صفحه دو بعدی مدل کنیم عملاً با چندضلعی مدل می‌شوند نه نقطه. بنابراین لازم است الگوریتم ایشان توسعه داده شود تا بتوانیم اشیای رنگی را که قرار است با پاره‌خط یا چندضلعی مدل شوند، نیز جدا کنیم. کار ما می‌تواند در داده کاوی و کلاس‌بندی اشیایی کاربرد داشته باشد که اشیاء به جای نقاط با پاره‌خط‌ها و چندضلعی‌ها مدل می‌شوند. کاربردهای الگوریتم ما در بخش ۴ مقاله بیشتر توضیح داده می‌شود.

۲- توصیف الگوریتم

ما ابتدا جداسازی پاره‌خط‌های رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال را بررسی کرده و سپس آن را به جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید $Q = \{q_1 \hat{q}_1, q_2 \hat{q}_2, \dots, q_m \hat{q}_m\}$ مجموعه‌ای

رورک و همکاران [۷] مطرح و با یک الگوریتم دارای زمان خطی حل شد. فکت [۹] در سال ۱۹۹۲ نشان داد که مسئله جداسازی نقاط توسط یک چندضلعی عمومی با کمترین تعداد لبه یک مسئله ان پی کامل است و یک الگوریتم تقریبی با زمان اجرای چندجمله‌ای ارائه داد [۱۰].

مسئله جداسازی نقاط توسط یک چندضلعی محدب با کمترین تعداد لبه توسط ادلس برونر و پرپاراتا [۸] حل شد و همچنین باندیپادهای و اریتا بنیک [۱۵] تعدادی مسئله هندسی را که شامل جداسازی نقاط رنگی هم بود، با زمان اجرای چندجمله‌ای حل نمودند.

ساریل‌ها ر پلد و میچل جونز [۱۶] در سال ۲۰۱۸ مسئله جداسازی n نقطه توسط کمترین تعداد خطوط را مطالعه کردند. آنها نشان دادند در مربع واحد حداقل تعداد خطوط لازم برای جداسازی n نقطه برابر $\theta(n^{2/3})$ است.

مصلحی و باقری [۱۱] جداسازی نقاط رنگی توسط مستطیل‌های همسان متمایز را بررسی کردند و همچنین آنها [۱۳] الگوریتمی با زمان اجرای $O(N \log N)$ برای جداسازی نقاط رنگی با مثلث‌های مینیمال با زاویه ثابت ارائه کردند. آنکوش آچاریا [۱۲] بر روی مسایل متنوعی از جداسازی کار کرده و الگوریتم‌های درجا ارائه کردند. شیخی و همکاران [۱۴] مسئله جداسازی نقاط غیر قطعی رنگی را مطالعه کرده و سه الگوریتم به ترتیب برای جداسازهای قطعی، محتمل و ماکسیمال ارائه کردند. جی و همکاران [۱۷] مسئله جداسازی خطی اشیای هندسی تصادفی را بررسی کرده و الگوریتمی با زمان اجرای چند جمله‌ای برای محاسبه احتمال تفکیک‌پذیری آنها ارائه دادند. ادوارد بنت [۱۸] و همکاران مسئله جداسازی نقاط با کمترین تعداد خطوط در صفحه را مطالعه کرده و نشان دادند این مسئله در حالت کلی نمی‌تواند سریع‌تر از روش بروت-فورس با زمان اجرای $n^{O(k)}$ حل شود که پارامتر k نشان‌دهنده تعداد خطوط است.

حسین‌زاده و باقری [۲۱] جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط مثلث‌های مینیمال با زاویه ثابت را مطالعه کرده و

دیگری با اندازه و جهت متفاوت دیگری پیدا خواهد شد که نقاط آبی را از نقاط قرمز جدا می‌کنند بنابراین ما به دنبال یافتن زوایایی مثل θ متعلق به بازه $(0, \frac{\pi}{4}]$ هستیم که مستطیل‌های جداساز با محور طول‌ها زاویه θ بسازند. مستطیل آبی $R_\theta(P)$ به مستطیلی گفته می‌شود که کلیه پاره‌خط‌های آبی داخل آن است. علاوه بر آن، اضلاع این مستطیل با محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد. منظور از گزارش بازه‌های زوایای که مستطیل تفکیک‌کننده وجود دارد، گزارش زوایای θ است که هیچ پاره‌خط قرمزی داخل $R_\theta(P)$ قرار ندارد. از طرفی می‌توان $R_\theta(P)$ را به صورت زیر نیز تعریف کرد. فرض کنید محورهای مختصات نسبت به محورهای اولیه در زاویه θ قرار دارد. یعنی محورهای اولیه مختصات را به اندازه θ خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران داده‌ایم. در این صورت منظور از $R_\theta(P)$ ، مستطیل پوششی کلیه پاره‌خط‌های آبی در دستگاه مختصات فعلی می‌باشد که اضلاع مستطیل هم‌راستای محورهای مختصات دوران داده شده می‌باشد.

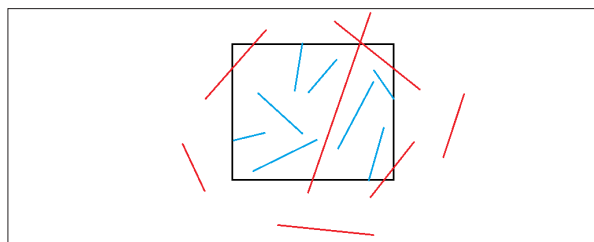
۲-۱ پردازش نقاط رخداد

ایده استفاده شده در این مقاله بر پایه روش جاروب چرخشی [۱۹] و معرفی یک مجموعه رخداد و پردازش آن‌ها می‌باشد. کلیه رخدادهای معرفی شده با چرخش مستطیل $R_\theta(P)$ به صورت زیر است:

۱- رخداد تغییر نقاط آبی محدودکننده مستطیل $R_\theta(P)$: می‌دانیم حداقل یک نقطه آبی روی هر یک از اضلاع مستطیل $R_\theta(P)$ قرار دارد. بنابراین، منظور از این رخداد زوایایی است که یکی از نقاط روی اضلاع $R_\theta(P)$ تغییر می‌کند. این نقاط زمانی تغییر می‌کنند که لااقل یکی از اضلاع مستطیل $R_\theta(P)$ ، با یکی از اضلاع $CH(Q)$ هم‌خط شود. زوایای وقوع این رخداد به سادگی به کمک روش کولیس‌های چرخان [۲۰] به دست می‌آید.

۲- رخداد ورود- خروج نقطه قرمز به مستطیل $R_\theta(P)$

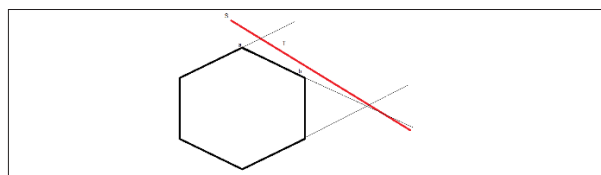
از m پاره‌خط (قرمز) و $P = \{p_1 p_1^{\wedge}, p_2 p_2^{\wedge}, \dots, p_n p_n^{\wedge}\}$ مجموعه‌ای از n پاره‌خط آبی باشند حال مطلوب است محاسبه مستطیل‌هایی که همه اعضای P را پوشش داده و هیچ کدام از اعضای Q را شامل نشوند و مینیمال باشند. منظور از مینیمال بودن این است که هر چهار لبه مستطیل جداساز مماس بر پوسته محدب نقاط آبی $CH(P)$ باشند. ابتدا نشان می‌دهیم که جداسازی پاره‌خط‌ها توسط مستطیل‌های مینیمال قابل کاهش به جداسازی نقاط نیست. اگر ادعا شود که با در نظر گرفتن نقاط ابتدا و انتهای پاره‌خط‌های آبی و قرمز می‌توان جداسازی پاره‌خط‌های آبی و قرمز را به جداسازی نقاط آبی و قرمز کاهش داد آنگاه می‌توان با مثال نقض زیر ادعای مذکور را رد کرد. در شکل ۱ اگر فقط نقاط ابتدا و انتهای پاره‌خط‌های آبی و قرمز را در نظر بگیریم واضح است که مستطیل مینیمال رسم شده کاملاً نقاط آبی و قرمز را از هم جدا کرده است در حالی که پاره‌خط‌های قرمز از خطوط آبی جدا نشده‌اند و این نشان‌دهنده این واقعیت است که جداسازی پاره‌خط‌های رنگی سخت‌تر از جداسازی نقاط رنگی است.



شکل ۱. جداسازی خطوط قابل کاهش به جداسازی نقاط نیست.

جهت پوشش کلیه پاره‌خط‌های آبی لازم است مستطیل تفکیک‌کننده بتواند $CH(Q)$ را در بر بگیرد. از آنجا که $CH(Q)$ زیرمجموعه مستطیل تفکیک‌کننده است، پس یک شرط لازم جهت تفکیک‌پذیری پاره‌خط‌ها با مستطیل آن است که $CH(Q)$ تک‌رنگ^۱ باشد. بنابراین، با فرض وجود $CH(Q)$ ابتدا در زمان $O(n)$ می‌توان بررسی کرد $CH(Q)$ تک‌رنگ است یا خیر. چنان‌چه مستطیل جداسازی برای جداسازی نقاط آبی و قرمز پیدا شود مستطیل‌های

محدبی مثل Y با $O(N)$ تعداد لبه می‌توان با امتداد اضلاع Y پاره خط S را به $O(N)$ پاره خط کوچک‌تر مثل T افراز کرد به طوری که همه نقاط واقع بر هر کدام از T ها لزوماً خطوط مماس آنها بر Y از دو راس ثابت مثل a, b می‌گذرند. در شکل ۳ یکی از زیرپاره‌خطها و دو راس ثابت متناظر نشان داده شده است.



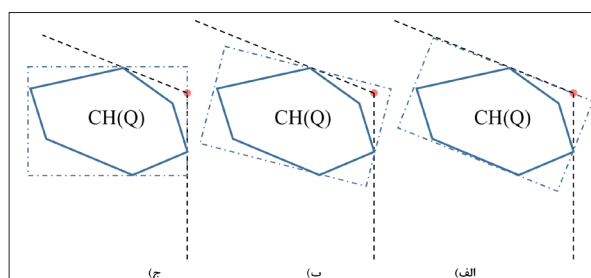
شکل ۳: پاره خط S به ۵ پاره خط کوچکتر مثل T افراز شده است.

اثبات:

واضح است که به ازای هر نقطه مثل S بر روی خط S خطوط مماس آن بر چندضلعی Y لزوماً از رئوس Y می‌گذرند و تا زمانی که خطوط مماس S بر روی یکی از اضلاع Y نیافتند همچنان نقاط تماسش با Y تغییر نمی‌کند و از طرفی تعداد لبه‌های Y برابر $O(N)$ است و با امتداد هر یک از اضلاع Y در نقطه تماسش با S یکی از زیرپاره‌خطهای آن دو تکه شده و یک واحد به تعداد زیرپاره‌خطها افزوده می‌شود پس اگر امتداد N تا لبه به S وارد شود دقیقاً به $N + 1$ پاره‌خط افراز می‌شود لذا تعداد کل پاره‌خطهای تولید شده $O(N)$ است.

بنابراین ۱ می‌توان گفت در مسئله جداسازی پاره‌خطهای رنگی، پاره‌خطهای قرمز هر کدام قابل افراز به $O(N)$ تا پاره‌خط کوچکتر هستند که همه نقاط قرمز واقع بر آنها لزوماً از دو راس ثابت $CH(Q)$ می‌گذرند. بنابراین ما با این خطوط قرمز افراز شده سر و کار داریم که تعداد کل آنها $O(N^2)$ است و نشان می‌دهیم که بر روی هر یک از پاره‌خطهای قرمز مذکور می‌توان تعیین کرد که بر روی چه تکه‌ای از آن همه نقاط قرمز، زاویه بین خطوط مماسشان کمتر از 90° درجه است و بر روی تکه‌ای دیگر همه نقاط قرمز، زاویه بین خطوط مماسشان ناکمتر از 90° درجه است لذا از نظر کاندید بودن برای دخول در مستطیل

: منظور از این رخداد زاویه‌ای است که یک نقطه قرمز وارد $R_\theta(P)$ می‌شود یا از $R_\theta(P)$ خارج می‌شود. فرض کنید از نقطه قرمز r خارج از $CH(Q)$ دو خط مماس بر $CH(Q)$ رسم می‌کنیم. این خطوط مماس $CH(Q)$ را به ترتیب در نقاط v_1 و v_2 قطع می‌کنند. اگر زاویه $\angle v_1 r v_2$ کمتر از $\pi/2$ باشد، نقطه قرمز r هیچگاه وارد مستطیل $R_\theta(P)$ نخواهد شد. با چرخش مستطیل تفکیک‌کننده $R_\theta(P)$ به صورت پادساعتگرد حول $CH(Q)$ زمانی که یکی از اضلاع مستطیل با یکی از خطوط مماس گذرنده از نقطه r هم‌خط شود، نقطه r وارد مستطیل $R_\theta(P)$ می‌شود و اگر ضلع دیگر مستطیل با خط مماس دوم هم‌خط گردد، این نقطه قرمز از $R_\theta(P)$ خارج می‌شود. به شکل ۲ توجه کنید.



شکل ۲. الف) نمایش رخداد ورود. ب) نمایش مستطیل $R_\theta(Q)$ پس از رخداد ورود. ج) نمایش رخداد خروج.

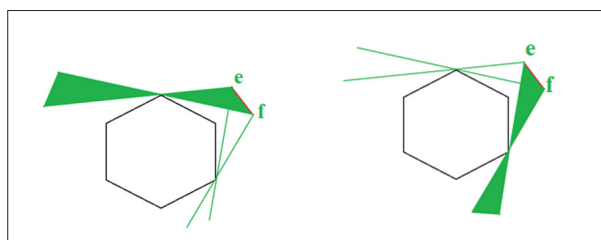
بنابراین با محاسبه دو خط مماس گذرنده از هر نقطه قرمز می‌توان زوایایی که مستطیل $R_\theta(Q)$ تکرنگ است را محاسبه کرد. اما مشکل اصلی آن است که هر یک از پاره‌خطهای قرمز حاوی بینهایت نقطه قرمز است که می‌توانند نامزد رخداد ۲ باشند و این نکته دقیقاً تفاوت کار ما با کار ون کرولد و همکارشان [۱۹] است. برای محاسبه و پردازش رخداد ۲ ادعا می‌کنیم که هر پاره‌خط قرمز متعلق به P قابل افراز به تعداد محدودی زیرپاره‌خط است که همه نقاط قرمز واقع بر این زیرپاره‌خطهای قرمز جدید دارای رفتار مشابهی در رخداد ۲ هستند. مدعای خود را با دو لم نشان می‌دهیم.

لم ۱. به ازای هر پاره‌خطی مثل S و هر چندضلعی

و مقدار ثابت p نیز عرض از مبدا پاره‌خط S است. حال با جای‌گذاری تساوی فوق در عبارت سینوس عملاً فقط یک متغیر y_s را خواهیم داشت یعنی زاویه بین دو خط مماس برابر است با یک عبارت تک متغیره.

بنابراین با تشکیل نامعادله می‌توان دقیقاً بازه‌ای از x_s و y_s را مشخص کرد که در آن بازه، زاویه بین دو خط مماس کمتر از 45° درجه است. همچنین می‌توان بازه‌ای از طول و عرض s را تعیین کرد که در آن زاویه بین خطوط مماس ناکمتر از 45° درجه است. که تعداد این بازه‌ها برای هر کدام از پاره‌خط‌های قرمز مقدار ثابت می‌باشد.

پس با تکرار $O(N^2)$ بار محاسبات فوق (هر دفعه تکرار به $O(1)$ زمان نیاز دارد) می‌توان در مورد هر پاره‌خط قرمز بخشی از آن را که هرگز وارد مستطیل جداساز نمی‌شود را مشخص کرده و کنار گذاشت و از باقیمانده هر پاره‌خط قرمز که به ازای هر نقطه واقع بر آن زاویه بین خطوط مماس ناکمتر از 45° درجه است نقاط ابتدایی و انتهایی آن را مشخص نموده و از آن دو نقطه (e, f) خطوط مماس مربوطه را رسم کرد. بدین ترتیب دو گوه در بالا و دو گوه در پایین به‌وجود می‌آیند که همه خطوط مماس مربوط به نقاط فی مابین e, f در آن نواحی می‌افتند.



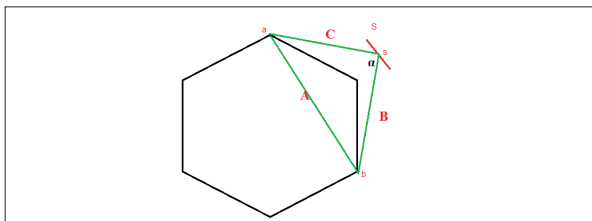
شکل ۵: خطوط مماس بین نقاط e, d

واضح است که وقتی یکی از اضلاع مستطیل در ناحیه سبز بالایی قرار بگیرد حداقل یکی از نقاط قرمز وارد مستطیل شده است و تا وقتی که ضلع بعدی مستطیل از ناحیه سبز پایین خارج نشود همچنان بخشی از خط قرمز در داخل مستطیل است و به ازای زاویه Θ مربوطه

جداساز دارای رفتار مشابهی هستند. به لم ۲ توجه کنید. لم ۲. فرض کنید پاره خط قرمز S دارای شیب m و نقاط ابتدایی و انتهایی c, d هستند و همه نقاط قرمز واقع بر آن، خطوط مماسشان بر چندضلعی محدب Y از دو نقطه ثابت a, b می‌گذرند. ثابت کنید که می‌توان تعیین کرد که به ازای چه بازه‌ای از محور طول‌ها و عرض‌ها، زاویه بین خطوط مماس نقاط قرمز واقع بر S کمتر از 45° درجه است و در چه بازه‌ای ناکمتر از 45° درجه است.

اثبات:

با توجه به این که هر نقطه دلخواه روی S مثل S لزوماً خطوط مماسش بر چندضلعی محدب Y از دو نقطه ثابت a, b می‌گذرد بنابراین با تشکیل مثلث asb و با استفاده از محاسبات ساده دبیرستانی می‌توان زاویه بین دو خط as و bs را طبق فرمول (۱) محاسبه کرد.



شکل ۴: لم ۲

(۱)
$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 * B * C * \cos \alpha$$
 در عبارت بالا $\cos \alpha$ بر اساس A, B, C قابل محاسبه است و A همان فاصله دو نقطه ثابت a, b است و B همان فاصله نقطه ثابت b از s است و نهایتاً C همان فاصله نقطه ثابت a از s می‌باشد و با توجه به این که a, b مقدار ثابت هستند لذا در محاسبه $\cos \alpha$ تنها دو متغیر وجود دارند که همان طول و عرض نقطه s می‌باشند.

بنابراین زاویه بین خطوط مماس قابل محاسبه بر اساس x_s و y_s است. حال از طرفی دیگر نقطه ss بر روی پاره خط S واقع است و باید در معادله مربوطه صدق کند

$$y_s = m * x_s + p \quad (۲)$$

که در آن مقدار ثابت m همان شیب پاره خط S است

مستطیل جداساز وجود ندارد.

بنابراین با توجه به دو لم مذکور عملاً رخداد ۲ (ورود و خروج نقاط قرمز) نیز قابل محاسبه و پردازش به نحو یاد شده است.

۲-۲ رسیدگی به رخدادها

پس از محاسبه رخدادها نوع ۱ و ۲ کافی است آن‌ها را به ترتیب زاویه وقوعشان در صف رخداد درج کنیم. در زاویه اولیه نقاط قرمز داخل $R_\theta(Q)$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را در متغیری نگهداری می‌کنیم. پس از آن رخدادها موجود در صف رخداد به ترتیب از صف رخداد خارج می‌شوند. اگر رخداد فعلی رخداد نوع ۱ باشد فقط نقاط تعریف‌کننده مستطیل $R_\theta(Q)$ تغییر می‌کنند و پردازش آن در زمان ثابت انجام می‌شود. اگر رخداد فعلی رخداد نوع ۲ باشد کافی است متغیر ذخیره‌کننده تعداد نقاط قرمز داخل $R_\theta(Q)$ را به روز کنیم. به این ترتیب با پردازش کلیه رخدادها نوع ۱ و ۲ می‌توان زوایای وجود مستطیل‌های تفکیک‌کننده را گزارش داد.

۲-۳ الگوریتم

شبه کد الگوریتم ما برای جداسازی پاره‌خط‌های آبی از پاره‌خط‌های قرمز به صورت زیر خواهد بود.

*Input: two sets P and Q of bichromatic lines.
Output: A list of intervals of angle θ at which the minimal separating rectangle exists.*

1. Compute $CH(P)$ and determine if it is monochromatic or not. If it is not monochromatic then there is no separating rectangle.
2. Compute the minimal covering rectangle $R_\theta(P)$ of blue lines, for $\theta=0$. (refer to Sec. 2.1)
3. Rotate $R_\theta(P)$ by $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ and compute event points of type 1 and 2 (refer to Sec. 2.1)
4. Insert all event points into a queue sorted on angle of rotation at which they occur
5. Handle the event points in order (refer to Sec. 2.2)
6. Report all intervals of θ in which the number of red line segments inside $R_\theta(P)$ is zero, which means existence of separating minimal rectangles.

قضیه زیر مرتبه زمانی اجرای الگوریتم محاسبه مستطیل‌های تفکیک‌کننده را نشان می‌دهد.
قضیه ۱- اگر P و Q مجموعه پاره‌خط‌های قرمز و آبی به اندازه کلی n باشند، گزارش زوایایی که به ازای آن‌ها مستطیل تفکیک‌کننده وجود دارد در زمان $O(n^2 * \log n)$ امکان‌پذیر می‌باشد.

اثبات: تعداد کل رخدادها نوع ۱ برابر $O(n)$ می‌باشد و به کمک تکنیک کوایس‌های چرخان در زمان $O(n)$ محاسبه می‌شود. از آن‌جا که پاره‌خط‌های قرمز به $O(n^2)$ تعداد زیرپاره خط قرمز افزای می‌شوند و از نقاط ابتدایی و انتهایی آن‌ها دو خط مماس بر $CH(Q)$ رسم می‌شوند بنابراین دفعات وقوع رخداد نوع ۲ نیز $O(n^2)$ می‌باشد. از هر نقطه قرمز به سادگی به کمک روش جستجوی دودویی می‌توان در زمان $O(\log n)$ خط مماس بر $CH(Q)$ را رسم کرد. بنابراین، محاسبه کلیه رخدادها نوع ۲ نیز در زمان $O(n^2 * \log n)$ امکان‌پذیر است. پس از محاسبه کلیه رخدادها نوع ۱ و ۲، می‌توان آن‌ها را به ترتیب در زمان $O(n^2 * \log n)$ در صف رخداد درج کرد. پردازش هر یک از رخدادها نوع ۱ و ۲ در زمان ثابت انجام می‌شود. بنابراین، پردازش هر دو نوع رخداد در زمان $O(n^2)$ انجام می‌شود. با توجه به کلیه مطالب ذکر شده گزارش زوایایی که به ازای آن‌ها مستطیل تفکیک‌کننده وجود دارد در زمان $O(n^2 * \log n)$ امکان‌پذیر می‌باشد

۳. جداسازی چندخطی‌های آبی و قرمز توسط مستطیل مینیمال

فرض کنید P مجموعه‌ای از چند خطی‌ها باشد که کلاً دارای n تا پاره‌خط آبی است و Q مجموعه‌ای از چندخطی‌ها باشد که کلاً دارای m تا پاره‌خط قرمز باشد. با صرف زمان $O(n \log m)$ می‌توانیم تک رنگ بودن $CH(P)$ را بررسی کنیم که در صورت تک رنگ بودن $CH(P)$ مسئله جداسازی چندخطی‌های رنگی به راحتی قابل کاهش به مسئله جداسازی پاره‌خط‌های آبی و قرمز است که در

یکی از کاربردهای مهم جداسازی نقاط در داده‌کاوای مربوط به پیدا کردن فضاهای خالی در مجموعه داده‌های بزرگ است. ادموندس و همکارانش [۵] الگوریتمی برای پیدا کردن فضاهای خالی در مجموعه داده‌های بزرگ ارائه کرده‌اند. در الگوریتم ایشان اشیای جدا شونده به صورت نقطه در نظر گرفته شده است که اگر اشیای رنگی به جای نقطه دارای مدل چندضلعی یا پاره خط باشند دیگر الگوریتم ایشان یا قابل استفاده نیست و یا باعث خطای قابل ملاحظه‌ای خواهد شد در حالی که الگوریتم ما می‌تواند در این کاربرد نیز بدون هیچ‌گونه خطایی به کار گرفته شود مثالی دیگر از کاربرد الگوریتم ما می‌تواند حصارکشی ساختمان‌ها باشد. فرض کنید تعدادی ساختمان که به دو گروه مختلف (آبی و قرمز) مثلاً امنیتی و اداری تقسیم می‌شوند قرار است حصارکشی شده و از هم جدا شوند به طوری که حصارکشی مذکور مستطیل شکل و مینیمال باشد. واضح است که مدل دو بعدی ساختمان‌ها چندضلعی است نه نقطه. بنابراین الگوریتم ون کرولد و همکارانش [۱۹] قابل استفاده نیست و الگوریتم ما می‌تواند همه حصارکشی مستطیل شکل مینیمال ممکن را تولید کند. برای این منظور کفیسست مدل دو بعدی ساختمان‌ها را به عنوان ورودی به الگوریتم ارائه شده در این مقاله بدیم تا همه حصارکشی‌های مستطیل شکل مینیمال ممکن با زوایای مختلف را به عنوان خروجی تولید کند.

۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله مسئله جداسازی نقاط رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال را توسعه داده و برای جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال الگوریتمی با زمان اجرای $O(N^2 * \log N)$ ارائه کردیم به طوری که N برابر مجموع تعداد پاره‌خط‌های آبی و قرمز در چند خطی‌های قرمز و آبی است که قرار است توسط مستطیل‌های مینیمال از هم جدا شوند. اهمیت نوآوری مقاله ما مربوط به مدل اشیای رنگی

بخش‌های قبلی به طور کامل بررسی شد. در صورت تک رنگ بودن $CH(P)$ کفیسست مجموعه پاره‌خط‌های آبی موجود در P و مجموعه پاره‌خط‌های قرمز موجود در Q را به عنوان ورودی الگوریتم ارائه شده در بخش قبلی در نظر گرفته و الگوریتم مذکور را اجرا کنیم. واضح است که زمان اجرای مورد نیاز برای جداسازی چندخطی‌های رنگی $O(N^2 * \log N)$ خواهد بود به طوری که $N = n + m$.

۴. کاربرد الگوریتم

چنانچه در بخش مقدمه اشاره شد الگوریتم ارائه شده توسط ون کرولد و همکارانش [۱۹] فقط برای جداسازی نقاط قابل استفاده است و اگر بخواهیم اشیای رنگی مدل شده به صورت پاره خط یا چندضلعی را توسط مستطیل‌های مینیمال جدا کنیم عملاً الگوریتم ایشان کاربردی ندارد و تا کنون نیز الگوریتمی برای جداسازی چندخطی‌های رنگی ارائه نشده است و ما در این مقاله برای اولین بار الگوریتمی برای جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال ارائه کرده‌ایم که می‌تواند در جداسازی اشیای رنگی مدل شده به صورت پاره خط یا چندضلعی مورد استفاده قرار گیرد. از نظر کاربردی می‌توان ادعا کرد که همه کاربردهایی که در زمینه‌های پردازش تصویر، آمار و دسته‌بندی اطلاعات، داده‌کاوای، گرافیک کامپیوتری و طراحی چیدمان VLSI می‌باشد در منابع معتبر متعدد [۵-۱۹] برای جداسازی نقاط توسط مستطیل‌های مینیمال ذکر شده است برای الگوریتم ما هم کاربرد محسوب می‌شوند. در هر کدام از کاربردهای مذکور چنانچه اشیای رنگی به جای نقطه با پاره خط یا چندضلعی مدل شده باشند الگوریتم ون کرولد و همکارانش [۱۹] قابل استفاده نیست و در صورت استفاده از الگوریتم ایشان مدل اشیای رنگی را به جای چندضلعی باید نقطه در نظر گرفت که در این صورت خطای قابل ملاحظه‌ای را باید قبول کنیم ولی الگوریتم ما بدون تحمیل هیچ‌گونه خطایی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

chromatic point set, Discrete Applied Mathematics, 286 pp.35-50.

[13] Moslehi, Z., & Bagheri, A.B. (2017). Separating bichromatic Point Sets by Minimal Triangles, International Journal of Foundations of Computer Science, 28(4) p.309.

[14] Sheikhi, F., Mohades, A., Berg, B., & Mehrabi, A.D. (2017). Separability of imprecise points, Computational Geometry 61, 24-37.

[15] Bandyapadhyay, S. & Banik, A. (2017). Polynomial time algorithms for bichromatic problems, In 553 Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics, Springer, 12-23.

[16] Har-Peled, S. & Jones, M. (2018). On separating points by lines, SODA '18: Symposium on Discrete Algorithms New Orleans Louisiana January, 918-932.

[17] Xue, J., Li, Y. & Janardan, R. (2018). On the separability of stochastic geometric objects, with applications, Computational Geometry Volume 74, 1-20.

[18] Bonnet, E. & Lampis, M. (2019). On the Parameterized Complexity of Red-Blue Points Separation, Journal of Computational Geometry, 10(1) 181-206.

[19] Kreveld, M., Lankveld, T. & Veltkamp, R. (2011) Identifying well-covered minimal bounding rectangles in 2D point data, Computers & Graphics, 35- 719-725.

[20] Toussaint, G. (1983). Solving geometric problems with the rotating calipers, In Proc. of the IEEE MELECON '83, A10.02/1-4.

[21] Moghaddam, M.H. & Bagheri, A.R. (2022). Separating bichromatic polylines by fixed-angle minimal triangles, Volume 29, Issue 5, September and October 2022, Pages 2405-2417.

است که قرار است توسط مستطیل‌های مینیمال جدا شوند. در دنیای واقعی مدل دو بعدی اشیاء چندضلعی است نه نقطه. بنابراین برای جداسازی اشیاء رنگی که به صورت پاره خط یا چندضلعی مدل می‌شوند، نمی‌توان از الگوریتم‌های قبلی استفاده کرد و الگوریتم ارائه شده در این مقاله چالش مذکور را برطرف می‌کند و این امکان را برای محققان فراهم می‌کند که در جداسازی اشیاء رنگی توسط مستطیل‌های مینیمال از الگوریتم ما استفاده کنند.

می‌توانیم جداسازی چندخطی‌های رنگی توسط دو مستطیل را به عنوان کار آتی معرفی کنیم که می‌توان مورد مطالعه قرار داد.

مراجع

- [1] Cristianini, N. & Taylor, J.S. (2000). An introduction to support vector machines and other kernel-based learning methods, Cambridge University Press.
- [2] Dobkin, D.P., Gunopulos, D. & Maass, W. (1996). Computing the maximum bichromatic discrepancy, with applications to computer graphics and machine learning, Journal of Computer and System sciences, 52(3), 453-470.
- [3] Duda, R.O., Hart, P.E. & Stork, D.G. (2012). Pattern classification, John Wiley & Sons.
- [4] J. Eckstein, P.L., Hammer, Y., Liu, M., Nediak, B. & Simeone, (2002). The maximum box problem and its application to data analysis, Computational Optimization and Applications, 23(3), 285-298.
- [5] Edmonds, J., Gryz, J., Liang, D.L. & Miller, R.J. (2003). Mining for empty spaces in large data sets. Theoretical Computer Science, 296(3) 435-452.
- [6] Megiddo, N. (1983). Linear-time algorithms for linear programming in R^2 and related problems, SIAM J. Comput, 12(4) p. 759.
- [7] O'Rourke, J., Kosaraju, S.R., & Megiddo, N. (1986). Computing circular separability, Discr. Comput. Geom, 1(1) p. 105.
- [8] Edelsbrunner, H. & Preparata, F.P. (1988). Minimum polygonal separation, Inform. Comput. 77 P. 218.
- [9] Fekete, S. (1992). On the complexity of min-link red-blue separation, Manuscript.
- [10] Mitchell, J.S.B. (1993). Approximation algorithms for geometric separation problems, Technical Report, State University of New York at Stony Brook.
- [11] Moslehi, Z. & Bagheri, A.B. (2016). Separating bichromatic point sets by disjoint isothetic rectangles, Scientia Iranica. Transaction D, Computer Science & Engineering, Electrical, 23(3) pp. 1228.
- [12] Acharyya, A., Minati, De., Nandy, S.C. & Pandit, S. (2020). Variations of largest rectangle recognition amidst a bi-